# DIFFUSION UND REAKTION AUF NETZWERKEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der

Eberhard – Karls – Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

**Joachim v. Below**

aus Wiedenbrück in Westfalen

1984

UNIV.
MICHIGAN
LIBR.

# DIFFUSION UND REAKTION AUF NETZWERKEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der

Eberhard – Karls – Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

**Joachim v. Below**

aus Wiedenbrück in Westfalen

1984

Tag der mündlichen Qualifikation: 27. Juli 1984
Dekan: Prof. Dr. U. Felgner
1. Berichterstatter: Prof. Dr. K.-P. Hadeler
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Kaul

Τόλμα πρήξιος ἀρχή,
τύχη δὲ τέλεος κυρίη.

Δημόκριτος

Fragm. 269 (Diels)

Meinem Vater zu eigen

Inhaltsverzeichnis


Einleitung und Überblick 1

Einige allgemeine Bezeichnungen 14

1. Graphen und Netzwerke 15

2. Parabolische Differentialgleichungen auf $c^2$ - Netzwerken 23

3. Lösung der linearen Anfangsrandwertaufgabe 31

4. Lösung semilinearer Reaktions - Diffusions - Gleichungen 54

Konstantenübersicht für die Abschnitte 3 und 4 78

5. STURM - LIOUVILLE - Eigenwertaufgaben auf $c^2$ - Netzwerken 79

6. Eine charakteristische Gleichung für die Eigenwerte 99

Literaturverzeichnis 113

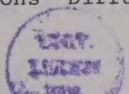
# Einleitung und Überblick

Eine klassische Aufgabe der diskreten Netzwerktheorie besteht in der Lösung der elektrischen Netzwerkgleichung

(1) $$D v = 0, \quad Z u = 0, \quad u = \mathcal{J} v + u_o$$

auf einem (einfachen) gerichteten Graphen $\Gamma = (E,K,\tau)$ mit Eckenmenge E, Kantenmenge K und Inzidenzrelation $\tau$. Dabei ist D die Inzidenzmatrix von $\Gamma$, Z die Kreismatrix von $\Gamma$ und $\mathcal{J}$ eine Diagonalmatrix oder ein linearer diagonaler Integral- oder Differentialoperator in der Zeitvariablen t. Man löst (1) mit einem systematischen Verfahren, das zurückgeht auf G. KIRCHHOFF (1847), vgl. auch BIGGS [1] §5, und die (1) lösenden u und v stellen - möglicherweise zeitabhängige - Gewichtungen der Kanten dar. Allgemein sind in der Graphentheorie gerichtete Graphen mit Gewichtungen ihrer Kanten und Ecken, darunter insbesondere Flüsse und Zustände, Gegenstand von Netzwerkbetrachtungen, vgl. BIGGS [2], CHEN, FORD und FULKERSON, HALIN [1], MAYEDA. Solcherart können Netzwerke als Modelle für alle jene Interaktionen zwischen Objekten (Ecken) dienen, bei denen die Kanten ausschließlich das mögliche Bestehen einer Beziehung anzeigen und die Gewichtungen der Kanten ein - möglicherweise zeitabhängiges - Maß für die Beziehung darstellen.

In den vorliegenden Untersuchungen sollen die Ecken E Punkte des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^m$ sein und die Kanten K nicht nur kombinierenden Charakters, sondern zugleich Jordanbögen im $\mathbb{R}^m$ sein, auf denen Ausbreitungsvorgänge zwischen den Ecken mittels ortsabhängiger Gewichtungen, also Funktionen auf den einzelnen Kanten, beschrieben werden können. Bilden E und K einen topologischen Graphen $\Gamma$ im $\mathbb{R}^m$, vgl. auch (1.2), so wird das zu $\Gamma$ gehörende $c^\nu$- Netzwerk G erklärt als Vereinigung der Kanten im $\mathbb{R}^m$, wobei $\Gamma$ immer als einfach, zusammenhängend und von endlicher Eckenzahl vorausgesetzt werde und $\nu$ die Differenzierbarkeitsordnung der Kantenparametrisierungen angibt. Auf dem kompakten und zusammenhängenden metrischen Raum G werden Reaktions - Diffusions - Vorgänge



betrachtet, bei denen die räumliche Lage verschiedener Kanten zueinander unerheblich ist und ein Austausch zwischen verschiedenen Kanten nur über die Ecken stattfindet. G wird daher auch losgelöst von der Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ betrachtet, und die Lage verschiedener Kanten zueinander wird nur von den Inzidenzen bestimmt. Dies hat zur Folge, daß die Gleichungen so beschriebener Modelle zu Aufgaben von Systemen führen, in denen die Bedingungen an den Ecken als Randbedingungen erscheinen. Dennoch werde G über die Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ erklärt, um der Begrifflichkeit topologischer Graphen folgen, leicht eine Topologie auf G erklären und etwa Gitterbetrachtungen in der Numerik anstellen zu können. Durch eine feste Wahl von Anfangs- und Endpunkten der einzelnen Kanten wird auf $\Gamma$ und G eine Orientierung vorgelegt, die durch die Inzidenzmatrix $D = (d_{ij})_{n\times N}$ beschrieben wird. In E werden Randecken ($\partial G$) und Verzweigungsknoten (Int E) unterschieden, je nachdem, ob eine Ecke $E_i$ auf genau einer Kante oder auf mindestens zweien liegt, vgl. auch (1.4). Bezeichnet noch $\pi_j : [0,l_j] \to k_j$ die Parametrisierung der Kante $k_j$ durch die Bogenlänge $x_j$, so läßt sich auf G eine typische Aufgabe mit Reaktions - Diffusions - Gleichungen auf den Kanten wie folgt fassen.

(2) Gesucht wird eine Funktion $u : G \times [0,T] \to \mathbb{R}$, die

(a) für $t = 0$ und auf $\partial G \times [0,T]$ vorgegebene Werte annimmt,

und deren Lokalisierungen $u_j = u \circ (\pi_j, id)$ auf den Kanten jeweils

(b) $$u_{jt} = u_{jx_jx_j} + f_j(x_j, t, u_j, u_{jx_j})$$

erfüllen und folgender KIRCHHOFFbedingung genügen:

(c) $$E_i \in \operatorname{Int} E \Longrightarrow \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, u_{jx_j}\left(\pi_j^{-1}(E_i), t\right) = 0.$$

(2c) und (2b) entsprechen der ersten und dritten Gleichung der elektrischen Netzwerkgleichung (1). Die Maschenregel "$Zu = 0$" in (1) wird jedoch naturgemäß ersetzt durch die stärkere Bedingung der Wohldefiniertheit von u in Int E, also der Stetigkeit aller $u_j$ bei gemeinsamen Ecken, vgl. (1.12.2).

Lösungen von Reaktions - Diffusions - Gleichungen auf Netzwerken erlauben mannigfache Interpretationen als Größen biologischer und physikalischer Vorgänge zu verzweigten Medien. Man denke zum Beispiel an die Wärmeleitung auf einer Verschaltung dünner Drähte mit Quellen und Senken.
CAMERER entwickelt in seiner Dissertation 1980 ein Modell zur elektrotonischen Spannungsausbreitung in Nervenzellen. Der Dendritenbaum $\Delta$ wird gebildet von N Dendritenabschnitten (Kanten), den Dendritenenden ($\partial\Delta$) und den Verzweigungspunkten (Int E), worunter das Soma als ausgezeichneter Verzweigungsknoten $E_1$ auftritt. Das Membranpotential V auf $\Delta$ ist stetig in den Verzweigungsknoten, erfüllt in $\partial\Delta$ eine STURMsche Randbedingung, sowie auf den Kanten und am Soma die dynamischen Gleichungen

$$\tau V_{jt} = \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_j V_{jx_j}) - k_j V_j + f_j, \quad 1 \leq j \leq N,$$

bzw.

$$\tau V_t(E_1,t) = \text{const.}\, V(E_1,t) + \frac{1}{\rho_o} \sum_{k_j \ni E_1} P_j(E_1)\, V_{jx_j}(E_1,t) + f_o,$$

worin $P_j = P_j(x_j)$ die Leitwerte, $k_j = k_j(x_j)$ die Leitfähigkeiten, $\rho_j = \rho_j(x_j) > 0$, $\rho_o > 0$, $f_j = f_j(x_j)$ und $f_o$ Inhomogenitäten sind. Der Längsstrom in den Dendriten $-P_j(x_j)V_{jx_j}(x_j)$ erfüllt in $\text{Int}\, E \setminus \{E_1\}$ die KIRCHHOFFsche Regel (2c).
Der Separationsansatz zu den homogenen Gleichungen führt die am Soma in eine $\lambda$-abhängige Randbedingung bei $E_1$ über und insgesamt zu einer Eigenwertaufgabe, die sich hier in die unter (5.20) behandelten einordnen läßt. Mit geeigneten Entwicklungen nach Eigenfunktionen läßt sich dann wie üblich eine Darstellung von V gewinnen.

In seinen Arbeiten [1] und [2] behandelt LUMER Evolutionsgleichungen auf $c^2$- Netzwerken $G^\circ$ zu linearen und vom Orte abhängigen Diffusionsoperatoren A. A ist dabei ein lokaler Operator im Sinne von LUMER [3], der aus der Verbindung der Differentialoperatoren

$$A_j(x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}) := a_j(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j^2} + b_j(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + c_j(x_j), \quad a_j > 0, c_j \leq 0,$$

auf den einzelnen Kanten $k_j$ mit den "verbindenden Operatoren"

$$B_{E_i} u := \sum_{k_j \ni E_i} c_{ij} u_{jx_j}(E_i), \quad E_i \in \operatorname{Int} E,$$

entsteht, indem Funktionen aus den Definitionsbereichen zu offenen Mengen $V \subseteq G^\circ$ die Bedingung $(E_i \in V \cap \operatorname{Int} E \Longrightarrow B_{E_i} u = 0)$ erfüllen müssen. Es werden auch, und gerade in LUMER [2], lokalendliche Netzwerke zugelassen, bei denen also für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$ nur endlich viele Kantenstücke in $K \cap G^\circ$ liegen. Im Unterschied zur hier getroffenen Definition gehören jedoch in der LUMERschen Erklärung zu einem $c^2$- Netzwerk die Randecken nicht dazu, vgl. auch (1.12.1).
In LUMER [1](3.1)und(4.2) und [2](3.1) wird dann gezeigt:

> A ist genau dann lokaldissipativ, wenn an jeder Ecke $E_i$ alle $c_{ij}$ gleiches Vorzeichen besitzen.
>
> Ist A lokaldissipativ, so ist für jede nichtleere, offene und relativkompakte Menge $V \subseteq G^\circ$ das CAUCHY - Problem
>
> $$\frac{\partial u}{\partial t} = A u, \quad u(0,\cdot) = f \in C_o(V) \text{ und } \forall\, t \geq 0\colon u(t,\cdot) \in C_o(V),$$
>
> lösbar. Für eine beliebige offene und nichtleere Menge $V \subseteq G^\circ$ gilt dies genau dann, wenn zu V eine CAUCHY - Barriere existiert.

Darin bezeichnet $C_o(V)$ den Raum der stetigen Funktionen in V, die gegen den Rand von V hin und im Unendlichen auf V verschwinden. Für alle nicht in $G^\circ$ liegenden Ecken $E_i$, insbesondere für die Randecken bedeutet dies jedoch, daß dort für alle $t \geq 0$ die Randbedingung $u(t,E_i) = 0$ vorgeschrieben wird.

Zur linearen Anfangsrandwertaufgabe (ARWA) sollen hier jedoch inhomogene DIRICHLETrandbedingungen, 2. und 3. Randbedingungen über $\partial G$, sowie allgemeinere lineare und inhomogene Randbedingungen über E, vgl. (3.17), betrachtet werden, wobei die Koeffizienten der Diffusionsoperatoren auch von der Zeit abhängen sollen. Auch sollen hier zum Eigenwertproblem (EWP) STURMsche Randbedingungen und solche, in die der Eigenwertparameter linear eingeht, gestellt werden. Naturgemäß erfordern diese Aufgaben andere Hilfsmittel als die bei LUMER verwandten.

Überblickend lassen sich die vorliegenden Untersuchungen in die Gebiete

qualitative Theorie von Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen auf $c^2$ - Netzwerken,

klassische Lösbarkeit von Anfangsrandwertaufgaben zu linearen und semilinearen parabolischen Differentialgleichungen auf $c^2$ - Netzwerken,

Eigenwertprobleme auf $c^2$ - Netzwerken mit Randbedingungen, die auf spezielle S - hermitesche Randeigenwertprobleme führen,

einordnen und gliedern sich im einzelnen wie folgt.
Im 1. Abschnitt werden grundlegende Bezeichungen, $c^\nu$ - Netzwerke und einige Funktionenräume auf $c^\nu$ - Netzwerken G eingeführt, darunter insbesondere die Räume $C_K^{\mu+\alpha}(G)$ (1.7) und $C_K^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega)$ (1.9) für $\Omega := G \times [0,T]$, in denen eine feste KIRCHHOFFbedingung (K) gilt.

Im 2. Abschnitt wird das Lösungsverhalten in $C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ von allgemeinen parabolischen Differentialungleichungen

$$(\dagger) \quad u_{jt} \lesseqgtr F_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j},u_{jx_jx_j}) \text{ über } k_j \quad (1 \leq j \leq N)$$

auf $\Omega$ behandelt. Dieses Verhalten ähnelt in den Verzweigungsknoten dem, welches in der klassischen Theorie über einem Gebiet Lösungen in inneren Punkten zeigen, womit sich eine disjunkte Aufteilung von $\Omega$ in ein parabolisches Inneres $\Omega_p = (G \setminus \partial G) \times (0,T]$ und in einen parabolischen Rand $\omega_p = \Omega \setminus \Omega_p$ rechtfertigt. Immer wird natürlich auch der Fall $\partial G = \emptyset$ zugelassen.
Zu (†) werden dann ein Analogon zum NAGUMO - WESTPHAL - Lemma (2.3), ein Vergleichssatz (2.8.1) und die Eindeutigkeit der Lösung der 1. Randwertaufgabe (RWA) bei einseitiger Lipschitzbedingung in $u_j$ (2.4) gezeigt. Dazu werden das Lemma IV.24.I aus der Monographie 1964 von WALTER, sowie die dort entwickelte Technik auf Netzwerke übertragen.
Anschließend wird für den Fall, daß jedes $F_j = \mathcal{D}_j$ ein semilinearer, gleichmäßig parabolischer Differentialoperator

ist, das starke Maximum - Minimum - Prinzip (2.6) nachgewiesen und zu einer Lösung der Gleichungen $u_{jt} = \mathcal{D}_j[u_j]$ in $C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ eine a priori - Abschätzung in der Maximumsnorm gewonnen (2.7).

Gegenstand der Abschnitte 3 und 4 ist die Lösbarkeit in $C_K^{2,1}(\Omega)$ von linearen (3) und semilinearen (4) parabolischen Gleichungen, die auf den einzelnen Kanten $k_j$ eines $c^3$ - Netzwerkes G gestellt sind ($1 \leq j \leq N$):

$$(3) \quad u_{jt} = a_j(x_j,t)u_{jx_jx_j} + b_j(x_j,t)u_{jx_j} + c_j(x_j,t)u_j + f_j(x_j,t)$$

$$(4) \quad u_{jt} = a_j(x_j,t)\, u_{jx_jx_j} + f_j\left(x_j,t,u_j,u_{jx_j}\right)$$

Der Hauptsatz (3.3) des 3. Abschnittes besagt, daß unter natürlichen Glattheitsvoraussetzungen und Kompatibilitätsbedingungen an die Koeffizienten und Randdaten die ARWA (3.2) zu (3) mit DIRICHLET-, NEUMANNN- oder 3. Randbedingung genau eine Lösung in $C_K^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega)$ besitzt. Zum Nachweis der Lösung wird die ARWA äquivalent in eine sachgemäße ARWA (3.14)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})\, u = f \quad \text{in } (0,1) \times (0,T] \\ \mathcal{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\, u = \Phi \quad \text{in } \{0,1\} \times [0,T] \\ u\Big|_{t=0} = \phi \end{cases}$$

eines stark - parabolischen N×N - Systemes überführt, das auftaucht als Spezialfall in der von V. A. SOLONNIKOV in Erweiterung des Parabolizitätsbegriffes nach I. G. PETROVSKIĬ eingeführten Klasse parabolischer Operatoren, vgl. SOLONNIKOV I § 1 und LSU VII § 8. (Die Monographie 1968 von LADYŽENSKAJA, SOLONNIKOV und URAL'CEVA wird durchweg mit "LSU" abgekürzt.) Dabei werden die KIRCHHOFFbedingung, die Stetigkeitsforderung in Int E und die Randbedingungen über $\partial G$ zusammengefaßt zu der System - Randbedingung $\mathcal{B}\, u = \Phi$, in deren Verwickeltheit gerade die Notwendigkeit für die Einordnung in die SOLONNIKOV'sche Theorie liegt und die sich nicht einordnen läßt in die - zum Beispiel - bei AMANN, LSU VII §§ 1-4

oder v. WAHL betrachteten Randbedingungen. Zur Rückführung auf ein Differentialgleichungssystem eignet sich naturgemäß ein reelles Intervall als räumliches Gebiet am besten. Unter Zuhilfenahme geeigneter Teilungen und Verdoppelungen von Kanten, werden die ARWAn (3.2) letztlich elementar in die von SOLONNIKOV behandelten (LSU VII §§ 9-10) eingereiht und mit dem SOLONNIKOV'schen Existenzsatz (3.15) gelöst. Zur leichteren Einordnung wird unter (3.16) eine Konkordanz der hier verwandten Bezeichnungen zu den bei LSU gebräuchlichen aufgestellt.
Der so beschrittene Weg legt sogleich die Erweiterung auf allgemeine Randbedingungen (3.17) über allen Ecken

$$\delta_i \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, c_{ij}(t)\, u_{jx_j}(E_i,t) - r_i(t) u(E_i,t) = \psi_i(t)$$

mit $\delta_i^2 + |r_i(t)| > 0$ für $1 \leq i \leq n$ nahe und zeigt auch, wie man im Falle linearer parabolischer Gleichungen von höheren Ordnungen vorzugehen hat (3.18.1).

Im 4. Abschnitt wird die Lösbarkeit von (4) in $C_K^{2,1}(\Omega)$ unter der DIRICHLETrandbedingung $u\big|_{\omega_p} = \Psi\big|_{\omega_p}$ zu vorgegebenem $\Psi \in C_K^{2,1}(\Omega)$ behandelt. Auch hier scheitert eine direkte Anwendung vieler neuerer Arbeiten über nichtlineare parabolische Systeme - etwa AMANN 1978 und v. WAHL 1981 - an der Einordnung der Randbedingung $\mathfrak{B}u = \Phi$, also der KIRCHHOFFbedingung und der Stetigkeitsforderung in Int E, da dort lediglich "diagonale" (AMANN) Randbedingungen betrachtet werden. Gestützt auf die Lösbarkeit der linearen ARWA, kann hier stattdessen einer skalaren Theorie gefolgt werden, die sich zur Anwendung des Fixpunktprinzipes von LERAY und SCHAUDER 1934, basierend auf der Homotopieinvarianz eines Abbildungsgrades, anlehnt an die bei LSU entwickelten Techniken von a priori - Abschätzungen. Grundsätzlich lassen sich viele dieser für allgemeine semilineare parabolische Gleichungen auf Netzwerke übertragen, dies scheitert zum Beispiel jedoch an der KIRCHHOFFbedingung für die von S. N. BERNŠTEĬN entwickelte Abschätzungsmethode, vgl. LSU IV § 17.

Neben anderen Abschätzungen gelangen an entscheidender Stelle die Theoreme (3.1), (4.2) und (5.1) des Kapitels V in LSU zur Anwendung, von denen hier die folgenden Spezialfälle benötigt werden:

Sei $Q_T = (a,b)\times(0,T)$ und $u \in O^{2,1}(Q_T)$ (d.h. $u, u_x \in C(Q_T)$ und $u_t$, $u_x$ und $u_{xx}$ sind in $Q_T$ beschränkt, vgl. LSU p.9) Lösung von

$$u_t = \frac{d}{dx}\left(a(x,t)\, u_x\right) + f(x,t,u,u_x)$$

mit $\max\{|u(\xi)| : \xi \in Q_T\} \leq M$. Zu $a:\overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ existiere die Ableitung $\frac{\partial a}{\partial x}$, $f:\overline{Q_T} \times [-M,M] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig in u und $p = u_x$, es gelte $\mu_1 \leq a \leq \mu_2$ mit positiven Konstanten $\mu_1, \mu_2$ und außerdem

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} a(x,t)\right| + |f(x,t,u,p)| \leq \mu p^2 + \phi(x,t)$$

mit $\phi \in L_{2q,2r}(Q_T)$, $q \in [1,\infty]$, $r \in [(1-\sigma)^{-1}, 2(1-2\sigma)^{-1}]$, $\mu > 0$, $\sigma \in (0,\frac{1}{2})$ und $1 = \sigma + r^{-1} + (2q)^{-1}$.

(LSU V Thm. 3.1) Ist dann $\sup\{|u_x(x,0)| : x \in (a,b)\} < \infty$ und $Q' \subseteq (a+d,b-d) \times (0,T)$ ein beliebiges Teilgebiet mit $d > 0$, so läßt sich $\sup\{|u_x(\xi)| : \xi \in Q'\}$ abschätzen durch eine Konstante, die nur von $M, \mu_1, \mu_2, \mu, r, q, d$ und $\sup\{|u_x(x,0)| : x \in (a,b)\}$ abhängt.

(LSU V Thm. 4.2 in Verbindung mit LSU VI Lemma 3.1) Ist dann $u \in O^{2,1}(\overline{Q_T})$ und stimmt auf dem parabolischen Rand $\Gamma_T$ von $Q_T$ mit $\Psi \in O^{2,1}(\overline{Q_T})$ überein, so ist $\max\{|u_x(\xi)| : \xi \in \overline{Q_T}\}$ abschätzbar durch eine Konstante, die nur von $M, \mu_1, \mu_2, \mu, q, r, T, b-a$ und $\max\{|\Psi(\xi), \Psi_t(\xi), \Psi_x(\xi), \Psi_{xx}(\xi)| : \xi \in \overline{Q_T}\}$ abhängt.

(LSU V Thm. 5.1) Liegt u sogar in $C^{2,1}(\overline{Q_T})$ mit $\sup\{|u_x(\xi)| : \xi \in Q_T\} \leq M_1$, sind a und f in $\overline{Q_T} \times [-M,M] \times [-M_1,M_1]$ lipschitzstetig bzgl. t und differenzierbar bzgl. u und p mit

$$\left|\frac{a(x,t+h)-a(x,t)}{h}\right|, \left|\frac{f(x,t+h,u,p)-f(x,t,u,p)}{h}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \text{ und } \left|\frac{\partial f}{\partial p}\right| \leq \phi_3(x,t),\ \phi_3 \in L_{q,r}(Q_T),\ \|\phi_3\|_{q,r,Q_T} \leq \mu_3 = \mu_3(M,M_1),$$

so läßt sich $\sup\{|u_t(\xi)| : \xi \in Q_T\}$ abschätzen durch eine Konstante, die nur von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu, q, r$ und $\sup\{|u_t(\xi)| : \xi \in \Gamma_T\}$

abhängt. Über Q' wie oben wird $\sup\{|u_t(\xi)| : \xi \in Q'\}$ abgeschätzt in Abhängigkeit von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu, q, r$, $\sup\{|u_t(x,0)| : x \in (a+d, b-d)\}$ und dem Abstand zwischen Q' und $\{a,b\} \times [0,T] \cup ([a,a+d) \cup (b-d,b]) \times \{0\}$.

Zu einer Lösung $u \in C_K^{2,1}(\Omega)$ von (4) mit obiger DIRICHLETrandbedingung erhält man eine a priori - Abschätzung in einer $(1+\beta)$ - Höldernorm, wenn man $|u_t|$ über den Verzweigungsknoten abschätzen kann, vgl.(4.3), worin naturgemäß die zentrale Schwierigkeit besteht. Denn KIRCHHOFFbedingung und Stetigkeitsforderung in Int E erlauben im allgemeinen keinen leichten Rückschluß auf $|u_t|$. Hier werden nun solche Voraussetzungen an $a_j$ und $f_j$ betrachtet, die ausufernde $L_{p,q}$ - Abschätzungen vermeiden und somit nahe den Verzweigungsknoten stärker sein werden als im Inneren der einzelnen Kanten. Neben den natürlichen Voraussetzungen (4.2.1-9) zur Anwendung der Sätze aus LSU, werden nahe Int E solche vorgegeben, die vermöge (2.7) eine gleichmäßige Abschätzung der Differenzenquotienten bzgl. t erlauben (4.5), oder solche (4.8 und 4.11), die $u_t$ über Int E als zeitliche Ableitung einer Funktion w in einem inneren Punkte eines geeigneten Gebietes deuten lassen, wobei auf w als Lösung einer passenden semilinearen Gleichung die zitierten Sätze aus LSU angewandt werden können. (4.8) enthält eine Wachstumsbedingung an die Nichtlinaritäten bzgl. der Flüsse in Int E, während (4.11.1) stattdessen nahe Int E die Einzelbedingungen $|f_j(x_j,t,u,p)| \leq$ const. + const.$\sqrt{|p|}$ vorschreibt. Den Voraussetzungen (4.5), (4.8) und (4.11) entsprechen die Existenzsätze (4.7), (4.9) bzw. (4.11). Unter (4.15) wird eine Übersicht über die Konstanten der Abschnitte 3 und 4 am Schlusse aufgestellt. Wie man im Falle allgemeiner semilinearer, parabolischer Gleichungen in Divergenzform auf Netzwerken vorgehen kann, fassen die Anmerkungen (4.14) zusammen, auf die Ausführungen muß hier jedoch wegen ihres Umfanges verzichtet werden.

Eingedenk der Loslösung von G von seiner Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ (vgl.S.2), unterstreichen die zum Beweis der Existenzaussagen verwandten Techniken der Abschnitte 3 und 4 den

Systemcharakter der auf G gestellten ARWAn, auch wenn das Verhalten von Lösungen in Int E dem in inneren Punkten ähnelt (vgl. S. 5 und Abschnitt 2) und wenn im 4. Abschnitt keine Einordnung in ein System erforderlich ist. Dieser Charakter zeigt sich auch bei den Eigenwertaufgaben.

Gegenstand des 5. Abschnittes sind STURM - LIOUVILLE - Eigenwertaufgaben auf einem $c^2$ - Netzwerk G, wie sie zum Beispiel bei einem Separationsansatz für die parabolischen Gleichungen $u_{jt} = \mathcal{L}_j u_j$ auftreten, zu Operatoren $\mathcal{L}_j$ (5.1), die auf den einzelnen Kanten $k_j$, $1 \leq j \leq N$, durch

$$\mathcal{L}_j u_j := \frac{1}{r_j(x_j)} \frac{d}{dx_j} \left( a_j(x_j)\, u_{jx_j} \right) - q_j(x_j)\, u_j \quad \text{mit } a_j, r_j > 0$$

für $u \in C^2(G)$ erklärt sind. Die behandelten REWPe werden in die von F. W. SCHÄFKE und A. SCHNEIDER 1965 - 68 entwickelte Theorie S - hermitescher Rand - Eigenwertprobleme eingeordnet, dargelegt in ihren Arbeiten [1], [2] und [3], welche durchweg mit SCH [1], [2] bzw. [3] zitiert werden.
Bei den vorgelegten Bedingungen über $\partial G$ (5.4.d oder $d_\lambda$), entscheiden allein die Koeffizienten aus der KIRCHHOFFbedingung, ob das Spektrum ganz in $\mathbb{R}$ liegt oder nicht. Auszuzeichnen ist dabei die zu $\mathcal{L}_j$ konsistente KIRCHHOFFbedingung

(5.2)
$$(K^*) \quad \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, a_j(E_i)\, u_{jx_j}(E_i) = 0, \text{ falls } E_i \in \operatorname{Int} E,$$

da sie stets auf reelles Spektrum führt, während bei allgemeiner KIRCHHOFFbedingung (5.3) schon in einfachen Fällen nichtreelle Eigenwerte auftreten, vgl. (5.22) und (6.15).
Nach natürlicher Umformung zu einem System läßt sich das REWP (5.4)

(5)
$$\begin{cases} \mathcal{L}_j u_j = -\lambda u_j \text{ für } 1 \leq j \leq N,\ u \in C^2_{K^*}(G) \text{ und} \\ (d) \text{ STURM'sche Randbedingung über } \partial G \text{ oder} \\ (d_\lambda) \ \lambda\text{-abhängige lineare Randbedingung über } \partial G \end{cases}$$

als kanonisches REWP ($5.5.1,2,2_\lambda$) im Sinne von E. HÖLDER 1939 deuten und stellt somit ein spezielles S - hermitesches REWP im Normalfalle dar (5.6.1):

(6)
$$\mathcal{F} y = -\lambda \mathcal{G} y, \ y \in \mathcal{F}_o := \left( C^1([0,1]) \right)^{2N} \text{ mit}$$

$\mathcal{F}y = \begin{pmatrix} y'+D_1(x)\,y \\ A_1y(0)+B_1y(1) \end{pmatrix}$, $\mathcal{G}y = \begin{pmatrix} D_2(x)\,y \\ A_2y(0)+B_2y(1) \end{pmatrix}$, $Sy = \begin{pmatrix} D_3(x)\,y \\ A_3y(0)+B_3y(1) \end{pmatrix}$, in $[0,1]$ stetigen $2N\times 2N$ - Matrizen $D_1$, $D_2$ und $D_3$, sowie $2N \times 2N$ - Matrizen $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$ und $B_3$.

Allgemein geht die SCHÄFKE - SCHNEIDER - Theorie von linearen Abbildungen $\mathcal{F}: \mathfrak{F}_o \to \mathfrak{H}_o$, $\mathcal{G}: \mathfrak{G}_o \to \mathfrak{H}_o$, $S: \mathfrak{G}_o \to \mathfrak{H}_o$ und $\mathbb{C}$ - Vektorräumen $\mathfrak{F}_o$, $\mathfrak{G}_o$, $\mathfrak{F}_o \subseteq \mathfrak{G}_o$ und $\mathfrak{H}_o$ aus, wobei $\mathfrak{H}_o$ ein komplexes Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$ trägt. Das EWP $\mathcal{F}y = \lambda \mathcal{G}y$ mit $y \in \mathfrak{F}_o \setminus (\ker\mathcal{F} \cap \ker\mathcal{G})$ heißt S - hermitesch, falls die Skalarprodukte $[\mathcal{F}y, Sz]$ und $[\mathcal{G}y, Sz]$ in $\mathfrak{R}_1 := \{y \in \mathfrak{F}_o : \mathcal{F}y \in \mathcal{G}\mathfrak{G}_o\}$ hermitesch sind. Die zu diesen EWPen in SCH [1] §2 entwickelte Begrifflichkeit findet ihre Hauptanwendung auf eine sehr große Klasse linearer REWPe zu Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, den S-hermiteschen REWPn, vgl. SCH [1] §3. Unter diesen zeichnen sich solche "im Normalfall" durch weitere Symmetrieeigenschaften aus, die, was die Randbedingungen betrifft, eine einfache algebraische Charakterisierung erlauben, vgl. SCH [2] §§ 1 - 5.

Das kanonische System, entsprechend den Gleichungen $\mathcal{L}_j u_j = -\lambda u_j$, führt immer zu einem S - hermiteschen System im Normalfalle, welches die Randbedingungen genau dann zu einem S - hermiteschen REWP im Normalfalle ergänzen, wenn gilt:

$\operatorname{rang}(A_1, B_1) = 2N$, $A_1B_1^* = B_1A_1^*$ im Falle (d) und zusätzlich im Falle $(d_\lambda)$ $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2N + \operatorname{rang}(A_2, B_2)$, und $A_1B_2^*$ und $A_2B_2^*$ hermitesch sind.

Da die Koeffizienten in (5) reell sind, alle Eigenwerte reell sind und auch als $\mathbb{R}$ - Basis zugehöriger Eigenräume stets reelle Funktionen auf G gewählt werden können, wird der Einfachheit halber die Behandlungsweise auf $\mathbb{R}$ beschränkt, was insbesondere bei den Skalarprodukten (5.7 und 8) zu (6) zu beachten ist.

Mit den Erklärungen (5.6, M, 7 und 8) faßt Satz (5.11) die Behandlung von (5) und (6) im Rahmen der SCHÄFKE - SCHNEIDER - Theorie zusammen. Den Eigenwert 0 ausschließend, sichert die Reduzibilität von (6) und dann die Defektendlichkeit von $\mathcal{F} + \lambda\mathcal{G}$, daß erklärt durch $\mathcal{F}\mathcal{A}y = -\mathcal{G}y$ ein solcher Epimorphimus

$\mathcal{A}: \mathcal{D}_0 \to \mathcal{R}_1$ besteht, auf den der Satz von H. WIELANDT [1] anwendbar ist.

(7) Satz (WIELANDT 1950) Sei $\mathcal{R}$ ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum versehen mit einem positiv - semidefiniten Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Sei $\mathcal{A}$ ein linearer und bzgl. $(\cdot,\cdot)$ hermitescher Operator in $\mathcal{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Gleichung $y = \lambda \mathcal{A} y$, $y \neq 0$, besitzt höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\lambda$ ohne endlichen Häufungspunkt.

(b) Jede Eigenlösung $y \neq 0$ aus (a) erfüllt $(y,y) > 0$.

(c) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $Id - \lambda \mathcal{A}$ von endlichem Defekt.

Sind dann $\lambda_1, .., \lambda_\nu, ..$ sämtliche Eigenwerte, ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählt, und bilden $y_1, .., y_\nu, ..$ ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenlösungen, so gilt für jedes $y \in \mathcal{R}$

$$(\mathcal{A} y, y) = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} (y, y_\nu)^2 .$$

Daraus folgen die Existenz von Eigenwerten (5.14) und, indem man durch (7) auf die Theorie vollstetiger und hermitescher Operatoren zurückgeführt wird, Entwicklungssätze (5.15 - 17), Extremalprinzipien und Minimaleigenschaften in Bezug auf das zugehörige DIRICHLETintegral (5.19). Hierzu wird in vielen Arbeiten die GREENsche Matrix benötigt, etwa bei REID Ch.VI, jedoch kann bei den vorliegenden Aufgaben wegen (7) ganz auf sie verzichtet werden, auch wenn eine Darstellung ihrer möglich ist, vgl. A. SCHNEIDER 1969.

Auch die Vorgabe einer $\lambda$ - abhängigen konsistenten KIRCHHOFFbedingung statt (K*), wie sie etwa aus Bedingungen

$$u_t(E_i,t) = \rho_{i1} u(E_i,t) + \rho_{i2} \sum_{j=1}^{N} d_{ij} a_j(E_i) u_{jx_j}(E_i,t), \quad E_i \in \operatorname{Int} E$$

entstehen, führt auf ein analog zu behandelndes REWP, vgl. (5.20), während bei Vorgabe einer gewichteten KIRCHHOFFbedingung (5.3) im allgemeinen keine Einordnung in die SCHÄFKE - SCHNEIDER - Theorie möglich ist, vgl. (5.22).

Für die hier behandelten REWPe weist die 1981 erschienene Monographie von CODDINGTON und de SNOO keine Vereinfachungen oder Verbesserungen auf.

Im 6. Abschnitt werden die Eigenwerte $\lambda$ zum NEUMANNproblem über G mit konstanten Koeffizienten $a_j$

$$(8)\qquad \begin{cases} a_j u_{jx_jx_j} = -\lambda u_j \text{ für } 1\leq j\leq N,\ u\in C^2_{K^*}(G), \\ u_{jx_j}(E_i) = 0 \text{ für } E_i\in \partial G \text{ und } E_i\in k_j, \end{cases}$$

als Lösungen geeigneter Determinantengleichungen charakterisiert, welche aus der Umformung von (8) zu einer Aufgabe (6.6) passender, der Adjazenzmatrix $\mathfrak{E}$ von $\Gamma$ gemäß gebildeter $n\times n$ - Matrizen hervorgehen. Die Eigenwerte $\lambda$ nämlich, die nicht von der Form $a_j l_j^{-2}\pi^2k^2$ $(k\in\mathbb{Z}, 1\leq j\leq N)$ sind, genügen einer in $\lambda$ transzendenten Gleichung (6.8.3)

$$(9)\qquad \det\left\{\mathfrak{D}(\lambda,A,L,\mathfrak{E})_{n\times n}\right\} = 0,$$

in die nur noch $\mathfrak{E}$, alle $a_j$ und die Kantenlängen $l_j$ eingehen. Im Falle $l_j^2 = a_j$ auf jedem $k_j$, reduziert sich die Lösung von (9) auf die Bestimmung des Spektrums einer aus den Kantenlängen gebildeten zeilenstochastischen Matrix Z (6.11), deren Eigenvektoren auch die von 0 verschiedenen Eckenverteilungen zu Eigenfunktionen bestimmen; unter (6.12) werden alle Eigenwerte mit Vielfachheiten und Eigenfunktionen bestimmt.

Der zu G gehörende topologische Graph $\Gamma$ bestimmt allein Eigenwerte $\lambda$ und - funktionen von (8), falls speziell $\Gamma$ regulär vom Grade $\gamma$ ist und alle $l_j=a_j=1$ sind (es reicht $l_j^2=a_j=$ const.). Dann läßt sich nämlich an die algebraische Graphentheorie anschließen (vgl. BIGGS [1], COLLATZ und SINOGOWITZ, A. J. HOFFMAN, HALIN [1]), denn zum Spektrum des Graphen besteht folgender Zusammenhang (6.14): Jede von 0 verschiedene Eckenverteilung $\phi$ einer zu $\lambda$ gehörenden Eigenfunktion ist eine Werteverteilung $\phi$ von $\Gamma$ zum Eigenwert $\gamma\cos\sqrt{\lambda}$ und umgekehrt:

$$\mathfrak{E}\phi = \gamma\cos\sqrt{\lambda}\,\phi.$$

Auch im Falle der Bedingungen (5)(d) oder $(d_\lambda)$ läßt sich eine (9) entsprechende Gleichung herleiten, vgl. (6.9).

Neben den in den Anmerkungen (4.14), (5.20), (5.21) und (5.22) bedachten Fragestellungen, wurden vom Verfasser noch Abschät-

zungstechniken für die Eigenwerte, Stabilitätsbetrachtungen und die Erweiterung auf lokalendliche Netzwerke behandelt, jedoch sollen sie späteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

Einige allgemeine Bezeichnungen

Zu Mengen A, B und C bezeichnet $|A|$ die Mächtigkeit von A, $B^A$ die Menge der Abbildungen $A \to B$, $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$ und $g \circ f$ die Hintereinanderausführung von $f:A \to B$ und $g:B \to C$. Zu $f:A \to C$ und $B \subseteq A$ ist $f|_B$ die Einschränkung von f auf B. Wie üblich wird zu $B \subseteq A$, $F(A) \subseteq C^A$ und $G(B) \subseteq C^B$ gesetzt

$$F(A) \cap G(B) := \{f \in F(A) : f|_B \in G(B)\}.$$

Konvention: Eine Summe über $\emptyset$ wird stets gleich 0 gesetzt.
Zu $\rho \in \mathbb{R}$ ist $[\rho] := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq \rho\}$.

Zu Matrizen M - und entsprechend für Vektoren - erfolgt die Formatangabe ($n_1$ Zeilen, $n_2$ Spalten) durch die Indizierung

$$M = (m_{ij})_{n_1 \times n_2},$$

M* bezeichnet die (konjugiert) transponierte Matrix zu M, $M \cdot N$ das HADAMARD - Produkt von M und N und

$$I_{n\times n} := (\delta_{ik})_{n\times n}$$

$$\underset{1\leq k\leq n}{\mathrm{Diag}}\,(x_k) := (\delta_{ik}x_k)_{n\times n} \text{ zu } (x_k) \in \mathbb{C}^n,$$

worin $\delta_{ik}$ das KRONECKERdelta bezeichnet.

Zu einer Funktion $f:Q \to \mathbb{R}$ mit $Q \subseteq D \times [0,T]$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ werden die $\alpha$-HÖLDERkonstanten bzgl. x und t bezeichnet mit

$$H^{\alpha}_{x\,Q}(f) := \sup\left\{\frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}} : (x,t), (y,t) \in Q\right\}$$

bzw.

$$H^{\alpha}_{t\,Q}(f) := \sup\left\{\frac{|f(x,t)-f(x,s)|}{|t-s|^{\alpha}} : (x,t), (x,s) \in Q\right\}.$$

RWA = Randwertaufgabe, ARWA = Anfangsrandwertaufgabe,
EWP = Eigenwertproblem, REWP = Rand - Eigenwertproblem.

Weitere grundlegende Bezeichnungen werden unter (1.4), (1.7), (1.9) und (2.1) getroffen.

## 1. Graphen und Netzwerke

Alle betrachteten Graphen $\Gamma = (E,K,\tau)$ mit Eckenmenge E, Kantenmenge K und Inzidenzrelation $\tau \subseteq E \times K$ seien nichtleer, endlich und schlingenfrei, und zwischen je zwei Ecken liege höchstens eine Kante:

(1.1) (a) $0 < |E| < \infty$

(b) $\forall\, k \in K\colon |\{e \in E\colon (e,k) \in \tau\}| = 2$

(c) $\forall\, e,e' \in E\colon |\{k \in K\colon (e,k) \in \tau, (e',k) \in \tau\}| \leq 1.$

Zur allgemeinen Graphentheorie werde im übrigen auf die zitierte Literatur, insbesondere HALIN [1,2] , verwiesen. Sei im folgenden stets $\Gamma = (E,K)$ ein endlicher topologischer Graph im $\mathbb{R}^m$, bestehend also aus einer endlichen Menge von Knoten $E \subset \mathbb{R}^m$ und aus einer endlichen Menge K zum Einheits - intervall $[0,1]$ homöomorpher Bilder im $\mathbb{R}^m$ unter folgenden Voraussetzungen:

(1.2) (a) Für jedes $k \in K$ besteht $k \cap E$ genau aus Anfangs- und Endpunkt von k.

(b) Für je zwei verschiedene $k,k' \in K$ gilt $k \cap k' \subset E$ und $|k \cap k'| \leq 1$.

Durch die Elementbeziehung $\in$ als Inzidenzrelation wird $\Gamma$ auf natürliche Weise zu einem Graphen im abstrakten Sinne, der (1.1) erfüllt. Jede Kante k von $\Gamma$ sei die Spur eines abgeschlossenen rektifizierbaren Weges im $\mathbb{R}^m$ der Länge $l_k$. Die Homöomorphie $\pi_k : [0,l_k] \xrightarrow{\sim} k$ bezeichne die Parametrisierung von k durch seine Bogenlänge, die nur von der Wahl des Anfangspunktes $\pi_k(0) \in k \cap E$ abhängt. Damit lassen sich nun $c^\nu$- Netzwerke leicht definieren.

(1.3) Definition G ist ein (beschränktes) $c^\nu$- Netzwerk im $\mathbb{R}^m$ mit zugehörigem topologischen Graphen $\Gamma$, falls (i) $\Gamma$ zusammenhängend ist, (ii) $G = \bigcup_{k \in K} k$ und (iii) $\forall k \in K\colon \pi_k \in C^\nu([0,l_k],\mathbb{R}^m)$.

Hierbei ist $C^\nu([a,b],\mathbb{R}^m)$ der Raum der $\nu$-mal stetig differenzierbaren Abbildungen $[a,b]\to\mathbb{R}^m$ und $\nu\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Die Bedingungen (1.1.b,c) sind für einen topologischen Graphen nicht einschränkend, da durch Teilung von Kanten und Hinzunahme der Teilungspunkte als weitere Ecken etwaige Schlingen und Mehrfachkanten aufgelöst werden können, ohne G als topologischen Raum zu verändern. Durch Fehlen nichts einschränkende isolierte Ecken ausschließend, ist die Voraussetzung (1.3.i) eine natürliche Vereinfachung, andernfalls gehe man zu den Zusammenhangskomponenten über. Mittels Graphenisomorphie kommt jeder Graph unter (1.1) als zu geeignetem $c^\infty$- Netzwerk gehörender topologischer Graph vor, da er geradlinig im $\mathbb{R}^3$ darstellbar ist.(vgl. HALIN [1] S.39) Versehen mit der durch den euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ induzierten Topologie ist G kompakt und zusammenhängend. Dieselbe Topologie wird auf G durch die Metrik mit Abstand d erzeugt, wenn d(p,q) die kleinste unter den Weglängen aller p und q verbindenden und ganz in G liegenden Kurven angibt. Als topologischer Raum wird G im folgenden losgelöst von der Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ betrachtet, und die Lage der verschiedenen Kanten zueinander wird nur von den kombinatorischen Bedingungen (1.2) und nicht von ihrer räumlichen Lage im $\mathbb{R}^m$ bestimmt. Zu jeder Kante k wird eine der beiden Ecken aus $k\cap E$ als Anfangspunkt $\pi_k(0)$ fest gewählt, sodaß $\Gamma$ zu einem gerichteten Graphen wird.
Beibehalten werden immer die folgenden

(1.4) Bezeichnungen

$n = |E|$ = Anzahl der Ecken,
$E = \{E_i : 1\le i\le n\}$, i ist stets der Eckenindex,
$N = |K|$ = Anzahl der Kanten,
$K = \{k_j : 1\le j\le N\}$, j ist stets der Kantenindex,
$\gamma(e) = |\{k\in K : e\in k\}|$ = Grad der Ecke e,
$\gamma_i = \gamma(E_i)$,
$\partial G = \partial\Gamma = \{e\in E : \gamma(e) = 1\}$ = Menge der Randecken in $\Gamma$,
$\partial G$ ist der topologische Rand bezüglich d,
$\operatorname{Int} E = \{e\in E : \gamma(e)>1\}$ = Menge der Verzweigungsknoten von $\Gamma$.

$l_j$ = Länge von $k_j$ als Bogen im $\mathbb{R}^m$,

$\pi_j = \pi_{k_j}: [0,l_j] \tilde{\to} k_j$ = Parametrisierung von $k_j$ durch seine Bogenlänge mit

$x_j \in [0,l_j]$ als ausgezeichnetem Parameter, $1 \le j \le N$.

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \pi_j(l_j) = E_i \\ -1, & \text{falls } \pi_j(0) = E_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$D = D(\Gamma) = (d_{ij})_{n\times N}$ = Inzidenzmatrix von $\Gamma$.

$\mathbb{R}^G = \{u: u:G \to \mathbb{R}\}$, zu $u \in \mathbb{R}^G$ und $1 \le j \le N$ bezeichnet immer $u_j = u \circ \pi_j : [0,l_j] \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$d_{ij} \neq 0 \Longrightarrow \pi_j^{-1}(E_i) = l_j \tfrac{1}{2}(1 + d_{ij});$$

da die Angabe des Indexes j das Argument eindeutig festlegt, wird - sofern erklärt - abkürzend gesetzt

$u_j(E_i) := u_j(\pi_i^{-1}(E_i))$, $u_{jx_j}(E_i) := u_{jx_j}(l_j \tfrac{1}{2}(1+d_{ij}))$ etc.

$$\Pi(G) = \Big\{(f_1,..,f_N) \in \prod_{j=1}^{N} \mathbb{R}^{[0,l_j]} : \forall k_\sigma, k_\tau \in K: \big(\emptyset \neq k_\sigma \cap k_\tau = \{e\} \Rightarrow f_\sigma(\pi_\sigma^{-1}(e)) = f_\tau(\pi_\tau^{-1}(e))\big)\Big\}$$

$C = (c_{ij})$ ist eine vorgegebene $n\times N$ - Matrix mit

$$\big(E_i \in k_j \Rightarrow c_{ij} > 0\big) \text{ für } 1 \le i \le n \text{ und } 1 \le j \le N.$$

Alle Funktionen $u:G \to \mathbb{R}$ werden vermöge

$$u \longmapsto (u_j)_{N\times 1} \in \Pi(G)$$

auf den Kanten als Funktionen der entsprechenden Bogenlängen $x_j$ aufgefaßt und dann oft mit $(u_j)$ identifiziert. Dies ist insbesondere dann geboten, wenn man Differenzierbarkeit auf G definieren möchte. Da die räumliche Lage der Kanten zueinander bis auf die Inzidenzen (1.2) irrelevant sein soll, kann man im allgemeinen keine übliche Ableitung in den Verzweigungsknoten erklären. In diesen Ecken fordert man stattdessen eine Beziehung zwischen den Zu- und Abflüssen in Form einer KIRCHHOFFbedingung mit Matrix C

$$\sum_{d_{ij}=-1} c_{ij}u_{jx_j}(E_i) = \sum_{d_{ij}=1} c_{ij}u_{jx_j}(E_i),$$

wobei natürlich $u_{jx_j}(E_i) = \frac{d}{dx_j}u_j(x_j)\Big|_{x_j=\pi_j^{-1}(E_i)}$. Für $\nu\geq 1$ heiße $u\in\mathbb{R}^G$ also differenzierbar mit der Regel (K) auf G, falls $u_j\in C^1([0,l_j])$ für $1\leq j\leq N$ und falls

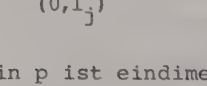
(1.5) für $1\leq i\leq n$ und $\gamma_i\geq 2$ gilt

$$(K) \qquad \sum_{j=1}^{N} d_{ij}c_{ij}u_{jx_j}(E_i) = 0.$$

Man beachte, daß D in (K) den Ableitungen das dem Durchlaufsinn der einzelnen Kanten gemäße Vorzeichen gibt. Die Differenzierbarkeit einer Funktion auf der Spur eines glatten Weges in einem Punkt der Spur kann natürlich auch durch eine Bedingung (K) mit $c_{ij}=1$ ausgedrückt werden. Auch ähnelt das Verhalten bei Extrema dem in inneren Punkten:

(1.6) Ist U differenzierbar mit der Regel (K) auf G und hat u bei $E_i \in \operatorname{Int} E$ ein lokales Extremum, so ist für alle j mit $d_{ij}\neq 0$ $u_{jx_j}(E_i) = 0$.

Inwiefern ist es zulässig, Differenzierbarkeit und Ableitung auf den Kanten mit den Bogenlängen $x_j$ zu erklären? Faßt man $\mathring{k}_j = k_j \setminus k_j \cap E$ als eindimensionale $c^1$- Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\phi\} = \{\pi_j^{-1}\big|_{\mathring{k}_j}\}$ auf, so ist $v:\mathring{k}_j\to\mathbb{R}$ p.d. bei $p\in\mathring{k}_j$ oder auf $\mathring{k}_j$ differenzierbar, falls $v_j = v\circ\phi^{-1}:(0,l_j)\to\mathbb{R}$ bei $x^* = \phi(p)$ differenzierbar bzw. $v_j\in C^1((0,l_j))$ ist. Der Tangentialraum $T_p$ in p ist eindimensional und, da $\phi$ allein Karte ist, gleich




$$\left\{\frac{d}{dt}(\zeta\circ\phi)\Big|_{t=x^*} \;\Big|\; \exists\,\varepsilon>0:\ \zeta:(-\varepsilon+x^*,x^*+\varepsilon)\to\mathring{k}_j \text{ ist } c^1\text{-Kv.}\ \&\ p=\zeta(x^*)\right\},$$

und wird gerade aufgespannt vom Basiseinheitsvektor

$$\frac{d}{dt}(\phi\circ\pi_j\big|_{(0,l_j)})\Big|_{t=x^*} = 1\in T_p.$$

Das Differential $d_p v$, also auf $T_p$ die Linearform

$$\frac{d}{dt}(\zeta\circ\phi)\Big|_{t=x^*} \mapsto \frac{d}{dt}(v\circ\zeta)\Big|_{t=x^*},$$

gibt bei $\underline{1}$ ausgewertet gerade $v_{jx_j}(x^*)$:

$$d_p v(\underline{1}) = \frac{d}{dt}(v\circ\pi_j|_{(0,l_j)})\Big|_{t=x^*} = \frac{d}{dx_j}(v\circ\pi_j)(x^*) = \frac{d}{dx_j}v_j(x^*).$$

Differenzierbarkeit und Ableitung von $v:k_j\to\mathbb{R}$ in $k_j\cap E = \{\pi_j(0),\pi_j(l_j)\}$ werden analog durch Betrachtung von $k_j$ als berandete $c^1$- Mannigfaltigkeit erklärt, insbesondere für $v_j = v\circ\pi_j$ bei 0 und $l_j$ durch die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{d}{dx_j} v_j(l_j \tfrac{1}{2}(1+d_{ij}) - h\, d_{ij}).$$

(Vgl. SULANKE, WINTGEN I.§§ 1-3, III.§ 4 S.216)

In diesem Sinne werden alle Ableitungen auf G verstanden, was unerläßlich ist, wenn man die Kanten losgelöst von ihrer Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ betrachtet. Falls man $k_j$ lokal um p als $c^1$- Kurve auffaßt, so ist obige Definition natürlich kohärent: Der Tangentialvektor $\pi_j' = \frac{d}{dx_j}\pi_j$ hat überall die euklidische Norm 1, und die Richtungsableitung von v in p in Richtung $\pi_j'$ ist gerade

$$\partial_{\pi_j'(x^*)} v\ (p) = \frac{d}{dx_j}(v\circ\pi_j)(x^*) = \frac{d}{dx_j}v_j(x^*).$$

Für $\mu\leq\nu$ ist es also möglich, $C^\mu(k_j)$ - im Sinne der Differentialgeometrie - mit $C^\mu([0,l_j])$ zu identifizieren.

(1.7) Einige Funktionenräume auf einem $c^\nu$- Netzwerk G

C(G) ist der Banachraum der stetigen Funktionen auf G versehen mit der Norm $|u|_G^{(o)} := \max\{|u(x)|:x\in G\}$. Eingedenk der Identifizierung $\mathbb{R}^G = \Pi(G)$ sei für $\nu\geq\mu\in\mathbb{N}$ und $\alpha\in(0,1)$

$$(1)\quad C^\mu(G) := C(G)\cap\prod_{j=1}^{N} C^\mu([0,l_j]),$$

$$(2)\quad C^{\mu+\alpha}(G) := C(G)\cap\prod_{j=1}^{N} C^{\mu+\alpha}([0,l_j]) \text{ für } \mu+\alpha\leq\nu,$$

wobei mit der Norm $|\cdot|_{[a,b]}^{(\mu+\alpha)}$ $C^{\mu+\alpha}([a,b])$ der Banachraum der

$\mu$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf [a,b] ist, deren $\mu$-te Ableitung hölderstetig mit Exponent $\alpha$ ist. (Vgl. LSU I.§1 (1.8),(1.9)) Versehen mit der Norm

$$(3) \qquad |u|_G^{(\mu+\alpha)} := \sum_{j=1}^{N} |u_j|_{[0,l_j]}^{(\mu+\alpha)}$$

ist $C^{\mu+\alpha}(G)$ Banachraum, da der Abschluß von $C^{\mu+\alpha}(G)$ in dem Banachraum $\prod_j C^{\mu+\alpha}([0,l_j])$ bezüglich der Norm $\sum_j |\cdot|_{[0,l_j]}^{(\mu+\alpha)}$ in $C(G)$ liegt.

Für $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^G$ und eine KIRCHHOFFregel (1.5) (K) sei stets

$$(4) \qquad \mathcal{F}_K = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ erfüllt } (K)\}.$$

$C_K^1(G)$ trennt Punkte von G, enthält die Konstanten und ist $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(G)$ wegen der Stetigkeit in Int E

$$0 = g(E_i)\sum_{j=1}^{N} d_{ij}c_{ij}f_{jx_j} + f(E_i)\sum_{j=1}^{N} d_{ij}c_{ij}g_{jx_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} d_{ij}c_{ij}(f_j g_j)_{x_j},$$

nach dem STONE - WEIERSTRASS'schen Satz (SCHAEFER [1] V.8.2) ist daher $C_K^1(G)$ dicht in $C(G)$ bezüglich der Norm $|\cdot|_G^{(o)}$.

(1.8) $\mu \in \mathbb{N}, \alpha \in (0,1), 1 \leq \mu+\alpha \leq \nu \Rightarrow C_K^{\mu+\alpha}(G)$ ist Banachraum bezüglich $|\cdot|_G^{(\mu+\alpha)}$.

Beweis Konvergiert $\{u^{(\ell)} : \ell \in \mathbb{N}\} \subset C_K^{\mu+\alpha}(G)$ bzgl.(3) gegen $u \in C^{\mu+\alpha}(G)$, so insbesondere punktweise in den ersten Ableitungen an den Intervallenden, woraus

$$0 = \lim_{\ell \to \infty} \sum_j d_{ij}c_{ij}u_{jx_j}^{(\ell)}(E_i) = \sum_j d_{ij}c_{ij}u_{jx_j}(E_i)$$

folgt. Also liegt u in $C_K^{\mu+\alpha}(G)$,q.e.d.

(1.9) Sei $T > 0$, $\Omega := G \times [0,T]$, und $\Omega_j := [0,l_j] \times [0,T]$. Der Banachraum $C(\Omega)$ versehen mit der Maximumsnorm $|\cdot|_\Omega^{(o)}$ wird (1.4) folgend durch $u_j(x_j,t) := u(\pi_j(x_j),t)$ mit

$$(1) \qquad C(\Omega) = \{u \in \prod_{j=1}^{N} C(\Omega_j) : \forall t \in [0,T] : u(\cdot,t) \in \Pi(G)\},$$

identifiziert, eingedenk dessen sei für $\nu \geq \mu \in 2\mathbb{N}$

$$(2) \qquad C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\Omega) := C(\Omega) \cap \prod_{j=1}^{N} C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\Omega_j),$$

wobei $C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\Omega_j)$ die Menge der Funktionen in $C(\Omega_j)$ ist, die $\mu$-mal nach $x_j$ und $\frac{\mu}{2}$-mal nach t stetig differenzierbar auf $\Omega_j$ sind. Für $\mu \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ und $\mu+\alpha \leq \nu$ sei

$$(3) \qquad C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega) := C(\Omega) \cap \prod_{j=1}^{N} C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega_j),$$

wobei $C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega_j)$ mit der Norm $|\cdot|_{\Omega_j}^{(\mu+\alpha)}$ (vgl.LSU I.§1 (1.10) - (1.12)) der Banachraum der Funktionen $f \in C(\Omega_j)$ ist, die auf $\Omega_j$ $\mu$-mal nach $x_j$ und $[\frac{\mu}{2}]$-mal nach t stetig differenzierbar und für die die folgenden Summen über Hölderkonstanten $H_x$ und $H_t$ in x bzw. t endlich sind (vgl.LSU l.c.)

$$\infty > \sum_{2r+s=\mu} H^{\alpha}_{x_j \Omega_j}\left(\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial x_j^s} f\right) + \sum_{0<\mu+\alpha-2r-s<2} H^{\frac{\mu+\alpha-2r-s}{2}}_{t\Omega_j}\left(\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^r \partial x_j^s} f\right).$$

Zur Verdeutlichung werde der Fall $\mu=2$ angeführt:

$$|f|_{\Omega_j}^{(2+\alpha)} = |f|^{(o)} + |f_t|^{(o)} + |f_{x_j}|^{(o)} + |f_{x_j x_j}|^{(o)} + H^{\alpha}_{x_j \Omega_j}(f_{x_j x_j}) + H^{\frac{\alpha}{2}}_{t\Omega_j}(f_t) + H^{\frac{1+\alpha}{2}}_{t\Omega_j}(f_{x_j}) + H^{\frac{\alpha}{2}}_{t\Omega_j}(f_{x_j x_j}).$$

Wie oben ist $C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega)$ Banachraum mit der Norm

$$(4) \qquad |u|_{\Omega}^{(\mu+\alpha)} := \sum_{j=1}^{N} |u_j|_{\Omega_j}^{(\mu+\alpha)},$$

und analog zu (1.8) gilt

(1.10) $\mu \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $1 \leq \mu+\alpha \leq \nu \Rightarrow C_K^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega)$ ist Banachraum bezüglich $|\cdot|_{\Omega}^{(\mu+\alpha)}$.

(1.11) Kompakt sind für $1 \leq \mu+\alpha < \lambda+\beta \leq \nu$ die Einbettungen

$$C_K^{\lambda+\beta}(G) \hookrightarrow C_K^{\mu+\alpha}(G) \text{ und } C_K^{\lambda+\beta,\frac{\lambda+\beta}{2}}(\Omega) \hookrightarrow C_K^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega).$$

Beweis Läßt man bei allen genannten Räumen den Index K weg, so gelten die Behauptungen mit dem Satz von A. TYCHONOFF über Produkte kompakter Räume und wegen der kompakten Einbettungen $C^{\lambda+\beta}([0,l_j]) \hookrightarrow C^{\mu+\alpha}([0,l_j])$ und $C^{\lambda+\beta,\frac{\lambda+\beta}{2}}(\Omega_j) \hookrightarrow C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega_j)$, vgl. etwa WLOKA § 28 und FRIEDMAN Chap.7 Sec.1. Aus (1.8) und (1.10) folgen dann die Aussagen mit fester KIRCHHOFFregel (K). Q.e.d.

(1.8) und (1.10) gelten natürlich auch für $\alpha = 0$, also für $C^{\mu}(G)$ und $C^{2\mu,\mu}(\Omega)$ versehen mit den Normen $|\cdot|_G^{(\mu)}$ bzw. $|\cdot|_\Omega^{(2\mu)}$, die dadurch entstehen, in dem man in den oben gebildeten Normen die Hölderkonstanten fortfallen läßt.

(1.12) Anmerkungen (1) Im Gegensatz zur vorliegenden Definition eines $c^2$-Netzwerkes G, versteht G. LUMER in seinen Arbeiten [1] und [2] unter einem $c^2$-Netzwerk in der hiesigen Bezeichnung $G \setminus N_e$ mit $\partial G \subseteq N_e \subseteq E$, so daß $G \setminus N_e$ noch zusammenhängend ist. Diese Definition paßt gerade zur Anwendung der Theorie lokaler linearer Operatoren und Halbgruppen (vgl.LUMER [3]), wobei die verbindenden Operatoren in $\operatorname{Int} E \setminus N_e$ der Regel (1.5) entsprechen.
(2) (1.5)(K) mit $C = D \cdot D$ entspricht dem ersten KIRCHHOFF'schen Gesetz der diskreten Netzwerktheorie. Die Übernahme der Maschenregel (2. KIRCHHOFF'sches Gesetz, vgl. BIGGS [1] p.32) ist hingegen ohne Belang, da sie von der Stetigkeitsforderung gedeckt wird: Ist $(u_j) \in \Pi(G)$, so gilt längs jedes gerichteten Kreises $\zeta = (E(\zeta), K(\zeta), \epsilon) \subseteq \Gamma$ natürlich

$$\sum_{\substack{k_j \in K(\zeta) \\ k_j \uparrow\uparrow \zeta}} \left(u_j(l_j) - u_j(0)\right) - \sum_{\substack{k_j \in K(\zeta) \\ k_j \uparrow\downarrow \zeta}} \left(u_j(l_j) - u_j(0)\right) = 0.$$

(3) Für $u \in C_K^1(G)$ ist im allgemeinen $(u_{jx_j}) \notin \Pi(G)$, daher ist Differenzierbarkeit höherer Ordnung von u in $\operatorname{Int} E$ schlecht plausibel zu erklären. Man kann dies jedoch ersetzen, indem man für $\left(\frac{\partial^s}{\partial x_j^s} u_j(l_j \frac{1+d_{ij}}{2})\right)$ eine lineare Gleichung etwa wie (1.5) oder "$\Pi(G)$" vorgibt. (Vgl.auch (3.18.1).)

## 2. Parabolische Differentialgleichungen auf $c^2$- Netzwerken

Im folgenden sei immer G ein $c^2$-Netzwerk mit topologischem Graphen $\Gamma$ wie in (1.3) mit den Bezeichnungen von (1.4), (K) eine feste KIRCHHOFFregel (1.5) mit Matrix C, $T>0$ und $\Omega, \Omega_j$ erklärt wie bei (1.9). Auf den Kanten seien nun parabolische Differentialgleichungen oder -ungleichungen mit Zeitvariabler t

$$(\dagger) \quad u_{jt} \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} F_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j},u_{jx_jx_j}) =: \mathcal{F}_j[u_j], \quad 1 \leq j \leq N,$$

d.i. ausgeschrieben $u_{jt}(x_j,t) \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} F_j\big(x_j,t,u_j(x_j,t),u_{jx_j}(x_j,t),$

$u_{jx_jx_j}(x_j,t)\big)$, gestellt, wobei $F_j: \Omega_j \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ monoton steigend in der Variablen $q = u_{xx}$ sei. Stets sei

(2.1)
$$\Omega_p = (G \setminus \partial G) \times (0,T]$$
$$\omega_p = (G \times \{0\}) \cup (\partial G \times (0,T]) = \text{"parabolischer Rand von } \Omega\text{"}$$
$$\Omega_{jp} = (0,l_j) \times (0,T]$$
$$\omega_{jp} = ([0,l_j] \times \{0\}) \cup (\{0,l_j\} \times (0,T]).$$

Bevor Lösungen von (†) verglichen werden, wird die zentrale Beweistechnik vorangeschickt, indem der Hilfssatz WALTER IV. 24.I auf Netzwerke übertragen wird.

(2.2) Lemma $\phi, \psi \in C^{0,0}(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ erfüllen die folgende Voraussetzung:

(1) Aus $\phi_j = \psi_j$, $\phi_{jx_j} = \psi_{jx_j}, \phi_{jx_jx_j} \leq \psi_{jx_jx_j}$ an einer Stelle in $\Omega_p$ folgt $\phi_{jt} < \psi_{jt}$ an dieser Stelle.

Dann gilt entweder (a) $\phi < \psi$ in $\Omega_p$, oder (b) es existiert ein maximales $t^* \in [0,T)$, so daß $\phi < \psi$ in $(G \setminus \partial G) \times (0,t^*]$ ist. Im Falle (b) gibt es dann eine Folge $\{(y_\tau,t_\tau) : \tau \in \mathbb{N}\}$ in $\Omega_p$ mit $\lim_{\tau\to\infty}(y_\tau,t_\tau) \in \omega_p$ und $\lim_{\tau\to\infty} t_\tau = t^*$ und $t_\tau > t^*$, $\phi(y_\tau,t_\tau) \geq \psi(y_\tau,t_\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{N}$.
Für $t^* > 0$ ist dann insbesondere $\lim_{\tau\to\infty} y_\tau \in \partial G$.

Beweis Den Fall Int E = Ø erledigt gerade WALTER IV.24.I. Die Behauptung wird zunächst für den folgenden Fall gezeigt:

(A) $\Gamma$ ist Stern, d.h. $n=N+1$, $|\partial G|=N$ und Int E = {e}.

Sei $t^* := \sup\{\xi \in [0,T] : \text{auf } (G\setminus\partial G)\times(0,\xi) \text{ ist } \phi<\psi\}$. Dann ist wegen der Stetigkeit von $\phi$ und $\psi$ auf $H := (G\setminus\partial G)\times\{t^*\}$ $\phi\leq\psi$. ($H = \emptyset$ ist möglich!) Gilt nun $\phi(\tilde{x},t^*) = \psi(\tilde{x},t^*)$ in einem Punkte $(\tilde{x},t^*) \in H$, so besitzt $\psi-\phi$ dort ein Minimum bzgl. x in H. Liegt $\tilde{x} = \pi_j(\tilde{x}_j)$ im Inneren einer Kante $k_j$, so ist $\phi_{jx_j}(\tilde{x}_j,t^*) = \psi_{jx_j}(\tilde{x}_j,t^*)$ und $\phi_{jx_jx_j}(\tilde{x}_j,t^*) \leq \psi_{jx_jx_j}(\tilde{x}_j,t^*)$.

Im Falle $\tilde{x} = e$ folgt mit (1.6) $\phi_{jx_j}(e,t^*) = \psi_{jx_j}(e,t^*)$ für alle $1\leq j\leq N$, eingeschränkt auf die Vereinigung je zweier Kanten $k_j$ und $k_l$ ist $\psi-\phi$ bei e stetig differenzierbar:

$\psi_{jx_j}(e,t^*) - \phi_{jx_j}(e,t^*) = \psi_{lx_l}(e,t^*) - \phi_{lx_l}(e,t^*) = 0$, wegen des Minimums bei e ist daher

$\psi_{jx_jx_j}(e,t^*) - \phi_{jx_jx_j}(e,t^*) \geq 0$ und $\psi_{lx_lx_l}(e,t^*) - \phi_{lx_lx_l}(e,t^*) \geq 0$.

Dabei braucht $(\psi_{jx_jx_j} - \phi_{jx_jx_j})_{N\times 1}$ nicht in $\Pi(G)$ zu liegen.

In beiden Fällen folgt mit der Voraussetzung (1) $\psi_t(\tilde{x},t^*) < \phi_t(\tilde{x},t^*)$, was aber auf H unmöglich ist: Nach Definition von t* und H und mit der Bedingung an $\tilde{x}$ gilt nämlich

$$0 \geq \lim_{\substack{\theta\to t^*\\ \theta<t^*}} \frac{\psi(\tilde{x},t^*)-\phi(\tilde{x},t^*) - \psi(\tilde{x},\theta)-\phi(\tilde{x},\theta)}{t^* - \theta} = \psi_t(\tilde{x},t^*) - \phi_t(\tilde{x},t^*).$$

Die Annahme eines Punktes $(\tilde{x},t^*) \in H$ mit $\phi(\tilde{x},t^*) = \psi(\tilde{x},t^*)$ ist also unhaltbar, und es ist $\phi<\psi$ auf H.

Ist $t^*<T$, so existiert wegen der Maximalität von t* eine Folge $\{(y_\tau,t_\tau) : \tau\in\mathbb{N}\} =: \Xi \subset \Omega_p$ mit

(¶) $\lim_{\tau\to\infty} t_\tau = t^*$ und $t_\tau > t^*$, $\phi(y_\tau,t_\tau) \geq \psi(y_\tau,t_\tau)$ für alle $\tau\in\mathbb{N}$.

Jeder Häufungspunkt von $\Xi$ muß aber in $\omega_p$ liegen, da $\phi<\psi$ auf H ist, was für jede Folge mit den Eigenschaften bei (¶) gilt. Damit ist die Behauptung im Falle (A) bewiesen.

Im Falle $|\text{Int } E| \geq 2$ wird zu jedem Verzweigungsknoten $E_i$ der $c^2$-Stern $S_i = \bigcup_{d_{ij}\neq 0} k_j$ mit zugehörigem topologischen Graphen $\Sigma_i = (E_i, \{k_j \in K : d_{ij}\neq 0\})$ gebildet. Nach dem oben bewiesenen

Teil, angewandt auf $\Sigma_i, S_i, \Delta_i := S_i \times [0,T], \phi\big|_{\Delta_i}$ und $\psi\big|_{\Delta_i}$, gibt es zu jedem $E_i \in \operatorname{Int} E$ eine Zahl $t_i^*$ mit den Eigenschaften von $t^*$ wie unter (A), in Verbindung mit $\Delta_{ip}$ und dem parabolischen Rand $\delta_{ip}$ von $\Delta_i$. Sei nun

$$t^* := \min \{t_i^* : \gamma_i \geq 2\}$$

und etwa $E_1 \in \operatorname{Int} E$ eine Ecke mit $t_1^* = t^*$. Im Falle $t^*=T$ gilt (a) analog mit obigem Schluß. Im Falle $t^*<T$ existiert eine Folge $\{(y_\tau, t_\tau) : \tau \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_{1p}$ mit den Bedingungen bei (¶) und

$$\lim_{\tau \to \infty} (y_\tau, t_\tau) = (y, t^*) \in \delta_{1p}.$$

Für den anderen Endpunkt $E_r$ der Kante $k_r$, auf der $E_1$ und $y$ liegen, können drei Möglichkeiten eintreten: Für $E_r \in \operatorname{Int} E$ und $t_r^* > t^*$ ist aus Stetigkeitsgründen $\phi \leq \psi$ auf $\{E_1\} \times (t^*, t_r^*]$ und nach Konstruktion $y = E_1$, da $\phi < \psi$ in $(S_r \setminus \partial S_r) \times (0, t_r^*]$ ist. In diesem und im Falle $E_r \in \operatorname{Int} E$, $t^* = t_r^*$ gilt also

$$\phi(y,t^*) = \psi(y,t^*),$$

was für $t^*>0$ unmöglich ist, es muß hier daher $t^*= 0$ sein mit $(y_\tau, t_\tau)$ als der unter (b) gesuchten Folge. Ist $E_r$ eine Randecke, so wähle man wiederum $t^*$ und $(y_\tau, t_\tau)$ als die unter (b) Genannten. Q.e.d.

Der Beweis zeigt, daß (2.2) für $\phi, \psi \in C(\Omega) \cap C_K^{1,0}(\Omega_p)$ auch unter der Voraussetzung gilt, daß die Ableitungen nach $t$ und die zweiten Ableitungen nach $x_j$ von $\phi$ und $\psi$ in $\Omega_p$ existieren. Für $\partial G = \emptyset$ ist im übrigen $t^* \in \{0, T\}$. Vollkommen analog zu dem Beweis bei WALTER IV.24.IV, folgt mit Hilfe von (2.2) ein dem Lemma von NAGUMO - WESTPHAL ähnlicher Satz für Netzwerke.

(2.3) Satz $u, v \in C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ erfüllen die folgenden Voraussetzungen:

(1) An jeder Stelle von $\operatorname{Int} E \times (0,T]$ gelte die Implikation $\left(d_{ij} \neq 0, u=v, u_{jx_j} = v_{jx_j}, u_{jx_jx_j} \leq v_{jx_jx_j} \Rightarrow u_t < v_t\right)$.

(2) $u_{jt} - \mathcal{F}_j[u_j] < v_{jt} - \mathcal{F}_j[v_j]$ in $\Omega_{jp}$ für $1 \leq j \leq N$.

Dann folgt aus $u < v$ auf $\omega_p$, daß $u < v$ auch in $\Omega_p$ gilt.

Unter schärferen Voraussetzungen an $F_j$, wie etwa der einer Lipschitzbedingung in u, kann man in (2.3.2) auch das Gleichheitszeichen zulassen, wenn man in der Behauptung von (2.3) "<" durch "≤" ersetzt. (2.3) dient vor allem zum Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung der 1. RWA auf $\Omega$.

(2.4) Satz Jedes $F_j$ erfülle eine einseitige Lipschitzbedingung in u:

(1) $\exists L>0\ \forall j\in\{1,..,N\}$:

$$w\geq u \Rightarrow F_j(x,t,w,p,q) - F_j(x,t,u,p,q) \leq L(w-u),$$

außerdem sei jedes $F_j$ nahe den Verzweigungsknoten stetig (es genügt, daß die Differentialgleichung (b) jeweils einseitig in $\mathrm{Int}\,E\times(0,T]$ gilt).

Dann besitzt die Randwertaufgabe

(a) $u\big|_{\omega_p} = \rho\in C(\omega_p)$

(b) $u_{jt} = F_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j},u_{jx_jx_j})$ in $\Omega_{jp}, 1\leq j\leq N$

höchstens eine Lösung in $C_K^{2,1}(\Omega)$, genauer $C(\Omega)\cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$.

Beweis Seien $u,v\in C(\Omega)\cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ zwei Lösungen der RWA, und zu $\varepsilon>0$ setze man $w(x,t) := v(x,t) + \frac{\varepsilon}{L}e^{2Lt}$, so daß $w>u$ auf $\omega_p$, $w\in C(\Omega)\cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ und $\varepsilon e^{2Lt} + v_t < w_t$. Wegen (b) und (1) erfüllen dann u und w (2.3.2), da in jedem $\Omega_{jp}$ gerade

$$0 = v_{jt} - \mathcal{F}_j[v_j] \leq \varepsilon e^{2Lt} - \mathcal{F}_j[w_j] + v_{jt} < w_{jt} - \mathcal{F}_j[w_j]$$

ist. Gilt nun an einer Stelle in $\mathrm{Int}\,E\times(0,T]$ $u=w, u_{jx_j}=w_{jx_j}$ und $u_{jx_jx_j}\leq w_{jx_jx_j}$, so ist dort nach Voraussetzung, wegen der Monotonieforderung an $F_j$ in der Variablen $u_{xx}$ und wegen $-\mathcal{F}_j[v_j] \leq \varepsilon e^{2Lt} - \mathcal{F}_j[w_j]$

$$0 \leq v_t - u_t - \mathcal{F}_j[w_j] + \mathcal{F}_j[u_j] + \varepsilon e^{2Lt} < v_t - u_t + 2\varepsilon e^{2Lt} = w_t - u_t.$$

Nach (2.3) ist $w>u$ in $\Omega_p$, also $v\geq u$ in $\Omega$, da $\varepsilon$ beliebig wählbar war. Durch Rollenvertauschung folgt u=v. Q.e.d.

Auf jeder Kante $k_j$ sei nun ein semilinearer Differentialoperator $\mathcal{D}_j$ gegeben,

$$\mathcal{D}_j[u_j] := a_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})u_{jx_jx_j} + f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j}),$$

wobei alle $\mathcal{D}_j$ gleichmäßig parabolisch seien:

(2.5) $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \; \forall j \in \{1,..,N\} \; \forall (x_j,t,z,p) \in \Omega_j \times \mathbb{R}^2$:

$$0 < \mu_1 \leq a_j(x_j,t,z,p) \leq \mu_2 .$$

Für $(\mathcal{D}_j)_{1 \leq j \leq N}$ kann man auf $\Omega$ das starke Maximum - Minimum - Prinzip nachweisen:

(2.6) Satz Alle $f_j : \Omega_j \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genügen der Bedingung

(1) $\exists c > 0 \; \forall j \in \{1,..,N\} \; \forall (x_j,t,z,p) \in \Omega_j \times \mathbb{R}^2$:

$$f_j(x_j,t,z,p) \leq c|p| \quad \left(f_j(x_j,t,z,p) \geq -c|p|\right).$$

Erfüllt dann $u \in C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$

(2) $u_{jt} \leq \mathcal{D}_j[u_j]$ $\left(u_{jt} \geq \mathcal{D}_j[u_j]\right)$ in $\Omega_{jp}$ für $1 \leq j \leq N$,

so gilt mit $\Lambda := \max\{u(x,t) : (x,t) \in \Omega\}$ $\left(\lambda := \min\{u(x,t) : (x,t) \in \Omega\}\right)$

(a) $\max\{u(x,t) : (x,t) \in \omega_p\} = \Lambda$ $\left(\min\{u(x,t) : (x,t) \in \omega_p\} = \lambda\right)$

(b) Aus $u(x^\circ,t^\circ) = \Lambda$ $\left(u(x^\circ,t^\circ) = \lambda\right)$ mit $(x^\circ,t^\circ) \in \Omega_p$ folgt $u(x,t) = \Lambda$ $\left(u(x,t) = \lambda\right)$ für alle $(x,t)$ in $G \times [0,t^\circ]$.

Beweis Es reicht, im Maximumsfalle (b) zu zeigen. Sei $(x^\circ,t^\circ) \in \Omega_p$ und $u(x^\circ,t^\circ) = \Lambda$, und es werde zunächst $x^\circ \notin E$ angenommen, daß also $x^\circ$ im Inneren einer Kante $k_j$ liege. Nach dem klassischen starken Maximum - Prinzip (WALTER IV. 26.IV und V) ist dann $u_j(x_j,t) = \Lambda$ in $[0,l_j] \times [0,t^\circ]$. Für eine (und jede) mit $k_j$ inzidente Kante $k_1$ schließt man dann, falls $k_j \cap k_1 = \{e\}$, für $t \in (0,t^\circ]$:

(*) $u_1(e,t) = \Lambda$, da $u \in C(\Omega)$,

(**) $u_{1x_1}(e,t) = 0 = u_{jx_j}(e,t)$ nach (1.6),

(***) $u_{1x_1x_1}(e,t) \leq 0$ wegen (*) und (**), analog zum Schluß S.24

(***) $u_{1x_1x_1}(e,t) = 0$, wegen (***), da mit (2), (1), $E_i := e \in \operatorname{Int} E$ und $u \in C_K^{2,1}(\Omega_p)$ : $\lim\limits_{h \to o} u_{1x_1x_1}\left(l_1 \frac{1+d_{ij}}{2} - h d_{ij}, t\right) \geq 0$.

Bildet man nun

$$z(\xi,t) := \begin{cases} u_j\left(l_j \frac{1+d_{ij}}{2} - \xi d_{ij}, t\right), & \text{für } \quad 0 \leq \xi \leq l_j \\ u_1\left(l_1 \frac{1+d_{i1}}{2} + \xi d_{i1}, t\right), & \text{für } -l_1 \leq \xi \leq 0 \end{cases}$$

und mit dem entsprechenden Ausdruck in $\xi$ und $-d_{ij,1}p$ statt p

$$a := \begin{cases} a_j & \text{für } \xi>0 \\ a_1 & \text{für } \xi<0 \\ \mu_1 & \text{für } \xi=0 \end{cases} \quad \text{und} \quad q := \begin{cases} f_j & \text{für } \xi>0 \\ f_1 & \text{für } \xi<0 \\ c & \text{für } \xi=0 \end{cases},$$

so ist $z \in C([-l_1,l_j] \times [0,T]) \cap C^{2,1}((-l_1,l_j) \times (0,T])$ Lösung der Differentialungleichung

$$z_t \leq a(\xi,t,z,z_\xi)\, z_{\xi\xi} + q(\xi,t,z,z_\xi),$$

die ihr Maximum bei $(0,t^\circ)$ annimmt. Wiederum folgt mit WALTER IV.26.IV und V, daß $u_1 = \Lambda$ für $t \leq t^\circ$ ist. Da G zusammenhängend ist, schließt man $u = \Lambda$ in $G \times [0,t^\circ]$.

Im Falle $x^\circ =: E_s \in \operatorname{Int} E$ wähle man eine Kante $k_j$ mit $x^\circ \in k_j$, und kann nach dem zuvor behandelten Fall annehmen, daß gilt

(††) $\quad \{(y,t) \in \Omega_{jp} : u_j(y,t) = \Lambda, t \geq t^\circ\} = \emptyset.$

Wegen der Stetigkeit von $u_j$ muß dann

$$d := \min\left\{\tfrac{1}{4}l_j, \sup\{\delta>0 : \forall (y,t) \in (0,l_j) \times (t^\circ-\delta,T] : u_j(y,t) < \Lambda\}\right\} > 0$$

sein, und $u_j < \Lambda$ auf der ganz in $\Omega_{jp}$ liegenden offenen Kreisscheibe

$$\{(y,t) : \sqrt{(\pi_j^{-1}(x^\circ) - d \cdot d_{sj} - y)^2 + (t^\circ - t)^2} < d\}$$

sein. Wegen (1) genügt $u_j$ in $\Omega_{jp}$ einer linearen Differentialungleichung

$$u_{jt} \leq a^* u_{jx_jx_j} + b^* u_{jx_j}$$

mit beschränkten Koeffizienten $a^*(x_j,t) := a_j(x_j,t,u_j(x_j,t), .. u_{jx_j}(x_j,t))$ und $b^*(x_j,t) := c \operatorname{signum}(u_{jx_j}(x_j,t))$, so daß nach einem Satz über Maxima auf dem parabolischen Rand (vgl. PROTTER,WEINBERGER 3.2 Thm.3 p.170), der auf R. VIBORNI und A. FRIEDMAN zurückgeht, folgt

$$d_{sj} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(x_j,t)\Big|_{(x_j,t)=(x^\circ,t^\circ)} > 0.$$

Dies ist aber unmöglich, da nach (1.6) $u_{jx_j}(x^\circ,t^\circ) = 0$ ist, der Fall (††) kann also nicht eintreten. Q.e.d.

Mit dem Maximum - Prinzip folgt etwa, daß im Falle $\partial G = \emptyset$ u wie in (2.6) strikt unterhalb des Maximums der Anfangsdaten für $t>0$ bleibt, falls diese nicht konstant sind. Oft benötigt man nicht die starke Aussage (2.6.b), und ist nur an

Abschätzungen von $|u|_{\Omega}^{(o)}$ interessiert. Viele dieser, in der klassischen Theorie bekannten lassen sich mit (1.6) auf Netzwerke übertragen, hier werde das folgende, LSU I.§2 Theorem (2.9) entsprechende Resultat angeführt.

(2.7) Satz Sei $u \in C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ Lösung von

(1) $u_{jt} = a_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})\, u_{jx_jx_j} + f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})$

in $\Omega_{jp} \cup \big(\{\xi \in [0,l_j] : \pi_j(\xi) \in \operatorname{Int} E\} \times (0,T]\big)$, für $1 \le j \le N$,

wobei $a_j : \Omega_j \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (2.5) und $f_j : \Omega_j \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden Bedingung genüge:

(2) $\exists\, b_1, b_2 > 0\ \forall j \in \{1,..,N\} \forall (x_j,t,z) \in \Omega_j \times \mathbb{R}$

$$z\, f_j(x_j,t,z,0) \le b_1 z^2 + b_2 .$$

Dann gilt die Abschätzung

$$|u|_{\Omega}^{(o)} \le \inf_{\lambda > b_1} e^{\lambda T} \max\Big\{ \max_{(x,t)\in\omega_p} |u(x,t)|, \sqrt{\frac{b_2}{\lambda - b_1}} \Big\}.$$

Die Erweiterung von $\Omega_{jp}$ in (1) auf $\Omega_{jp} \cup (\cdot\cdot)$ bedeutet gerade, daß die Differentialgleichung bei Verzweigungsknoten auf den inzidenten Kanten einseitig gelten soll.

Beweis Nach LSU I.§2 Thm.(2.9) gilt die Abschätzung, wenn man in der rechten Seite $\omega_p$ durch $\bigcup_{j=1}^{N} \omega_{jp}$ ersetzt. Sie ist also noch in Verzweigungsknoten nachzuweisen, wobei man der Beweisidee von LSU I.§2 Thm.(2.1) folgen kann.

$v := u\, e^{-\lambda t}$ liegt in $C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ und genügt der Gleichung

$$v_{jt} = a_j(\cdot,\cdot,u_j,u_{jx_j})\, v_{jx_jx_j} + e^{-\lambda t} f_j(\cdot,\cdot,u_j,u_{jx_j}) - \lambda v.$$

Nimmt nun v seinen größten positiven Wert bei $(E_i,t^\circ)$ mit $\gamma_i > 1$ und $t^\circ > 0$ an, so gilt nach (1.6) für alle $d_{ij} \neq 0$

$$u_{jx_j}(E_i,t^\circ) = v_{jx_j}(E_i,t^\circ) = 0,$$

$v_{jx_jx_j}(E_i,t^\circ) \le 0$ und $v_{jt}(E_i,t^\circ) \ge 0$, wegen (1) also

$$0 \le v_{jt}(E_i,t^\circ) \le e^{-\lambda t^\circ} f_j(E_i,t^\circ,u_j(E_i,t^\circ),0) - \lambda v_j(E_i,t^\circ).$$

Da $u(E_i,t^\circ) \ge 0$ ist, bewirkt (2) $\lambda u^2(E_i,t^\circ) \le b_1 \cdot u^2(E_i,t^\circ) + b_2$ und $u(E_i,t^\circ) \le \sqrt{b_1 (\lambda - b_2)^{-1}}$. Mit dem kleinsten negativen Wert verfährt man entsprechend. Q.e.d.

(2.8) Anmerkungen (1) Zur Ergänzung von (2.3) werde der folgende Satz angeführt, in dem auf die Bedingung (2.3.1) verzichtet werden kann.

(2.8.1) Vergleichssatz Alle $F_j$ erfüllen die einseitige Lipschitzbedingung (2.4.1), und $u,v \in C(\Omega) \cap C_K^{2,1}(\Omega_p)$ genügen in $\Omega_{jp} \cup (\{\xi \in [0,l_j] : \pi_j(\xi) \in \text{Int } E\} \times (0,T])$ der Ungleichung

$$u_{jt} - \mathcal{F}_j[u_j] \leq v_{jt} - \mathcal{F}_j[v_j], \text{ für } 1 \leq j \leq N.$$

Dann folgt aus $u \leq v$ auf $\omega_p$, daß $u \leq v$ auch in $\Omega_p$ gilt.

Setzt man nämlich zum Beweis durch Anwendung von (2.2) wiederum $w := v + \frac{\varepsilon}{L} e^{2Lt}$, so gilt an jeder Stelle in $\Omega_p$ mit $u = w$, $u_{jx_j} = w_{jx_j}$, $u_{jx_jx_j} \leq w_{jx_jx_j}$ wegen der Monotonie von $F_j$

$$0 \leq v_{jt} - u_{jt} - \mathcal{F}_j[w_j] + \mathcal{F}_j[u_j] + \varepsilon e^{2Lt}$$
$$< v_{jt} - u_{jt} + 2\varepsilon e^{2Lt} = w_{jt} - u_{jt}.$$

(2) Das Maximum - Minimum - Prinzip (2.6) kann auf stetig nach $q = u_{xx}$ differenzierbare $F_j$ übertragen werden, falls

$$\frac{\partial}{\partial q} F_j(x_j,t,z,p,\zeta q)q + F_j(x_j,t,z,p,0), \quad \zeta : \Omega_j \to (0,1)$$

die Voraussetzungen (2.5) und (2.6.1) erfüllt. Auf die Details, sowie auf weitere Verallgemeinerungen, die die klassische Theorie gebietet (vgl. WALTER IV.26 und 27), werde hier jedoch verzichtet.

## 3. Lösung der linearen Anfangsrandwertaufgabe

In diesem und im Abschnitt 4 sei G ein $c^3$-Netzwerk mit topologischem Graphen $\Gamma$ wie in (1.3), und es werden die Bezeichnungen von (1.4),(1.5),(1.9) und (2.1) beibehalten. Auf jeder Kante $k_j$ von G, $1 \leq j \leq N$, sei ein linearer, gleichmäßig parabolischer Differentialoperator gegeben

$$(3.1)\quad \mathcal{L}_j = \mathcal{L}_j\left(x_j,t,\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial t}\right) := \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{A}_j\left(x_j,t,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \text{, wobei}$$

$$\mathcal{A}_j\left(x_j,t,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) := a_j(x_j,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + b_j(x_j,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + c_j(x_j,t)$$

$$\text{mit: } \exists\, \mu_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, j \in \{1,..,N\}\ \forall\, (x_j,t) \in \Omega_j : a_j(x_j,t) \geq \mu_1 > 0,$$

in Verbindung mit der folgenden ARWA auf $\Omega$.

(3.2) (a) Stetigkeit in den Verzweigungsknoten
$u(\cdot,t) \in \Pi(G)$ für alle $t \in [0,T]$

(b) $\mathcal{L}_j u_j = f_j$ in $\Omega_{jp}$ für $1 \leq j \leq N$

(c) KIRCHHOFFbedingung mit Matrix C
u erfüllt (1.5) in $\Omega_p$.

(d) Anfangs- und Randbedingung auf $\omega_p$

$(d_o)$ $u\big|_{G\times\{0\}} = \psi : G \to \mathbb{R}$.

Für $1 \leq i \leq n$ und $\gamma_i = 1$, also in den Randecken

(d1) DIRICHLETrandbedingung

$$u\big|_{\{E_i\}\times(0,T]} = \psi_i : (0,T] \to \mathbb{R}$$

oder

(d2) NEUMANNrandbedingung

$$d_{ij} \neq 0 \Rightarrow u_{jx_j}(E_i,t) = 0 \text{ für alle } t \in (0,T]$$

oder

(d3) 3. Randbedingung

$$\exists \rho_{i1} \neq 0 : d_{ij} \neq 0 \Rightarrow d_{ij} c_{ij} u_{jx_j}(E_i,t) = \rho_{i1} u_j(E_i,t)$$

für alle $t \in (0,T]$.

Dabei seien $f_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$, $\psi$, $\psi_i$, $\rho_{i1}$ und $c_{ij} > 0$ in (d3) als Element der Matrix C vorgegeben, und $a_j$, $b_j$ und $c_j$ seien Funktionen $\Omega_j \to \mathbb{R}$. Die Bedingungen (a) und (c) werden hier einzeln aufgeführt, weil sie später als Randbedingungen eines parabolischen Systemes angesehen werden. Ziel dieses Abschnittes ist es nun, den folgenden Satz zu beweisen.

(3.3) Hauptsatz Sei $\alpha \in (0,1)$ und es gelten die folgenden Voraussetzungen für $1 \le j \le N$ und $1 \le i \le n$:

(1) $a_j, b_j, c_j \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_j)$

(2) $f_j \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_j)$

(3) $\psi \in C_K^{2+\alpha}(G)$, und im Falle (d1) $\psi_i \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T])$, falls $E_i \in \partial G$.

(4) Kompatibilitätsbedingungen

1) $\psi \in \Pi(G)$ (in (3) enthalten)

2) $\psi$ erfüllt (d1), (d2) bzw. (d3) für $t = 0$.

3) $\psi$ erfüllt (K) mit Matrix C. (in (3) enthalten)

4) Falls $\gamma_i = 1$ und $d_{ij} \neq 0$, so gilt

$$\psi_{it}(0) = \mathcal{A}_j(E_i, 0, \frac{\partial}{\partial x_j})\, \psi_j(E_i) + f_j(E_i, 0).$$

5) Falls $k_j \cap k_s = \{E_i\}$, so gilt

$$\mathcal{A}_j(E_i, 0, \frac{\partial}{\partial x_j})\, \psi_j(E_i) + f_j(E_i, 0)$$
$$= \mathcal{A}_s(E_i, 0, \frac{\partial}{\partial x_s})\, \psi_s(E_i) + f_s(E_i, 0).$$

Dann existiert genau eine Lösung $u \in C_K^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ der ARWA (3.2), und es gilt die Abschätzung

$$|u|_\Omega^{(2+\alpha)} \le K_0 \left( \sum_{j=1}^{N} |f_j|_{\Omega_j}^{(\alpha)} + |\psi|_G^{(2+\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} |\psi_i|_{[0,T]}^{(1+\frac{\alpha}{2})} \right),$$

mit einer Konstanten $K_0$, die nur von den Koeffizienten aller $\mathcal{A}_j$, C, $\rho_{i1}$, G, $\Gamma$ und T und nicht von $f_j$, $\psi$ und $\psi_i$ abhängt. Der letzte Summand in der Abschätzung tritt nur im Falle (d1) auf.

Man beachte, daß die Indices der Normen angeben, wie die Exponenten zu verstehen sind, vgl. (1.9.4) und (1.7.3).
Zum Beweis von (3.3) wird die ARWA (3.2) auf eine zu ihr äquivalente ARWA eines geeigneten linearen parabolischen Systemes zurückgeführt, welches sich in die von V.A.SOLONNIKOV behandelte Klasse von Systemen einordnet und zu dem die neue ARWA sachgemäß ist, vgl. LSU VII.§§8-9 und SOLONNIKOV I.§1.
Eine Funktion $g_j\colon [0,l_j] \to \mathbb{R}$ in $x_j$ zur Kante $k_j$ wird auf dem Intervall $[0,1]$ erklärt vermöge $x = x_j/l_j$

$$g_j(x) := g_j(xl_j),\quad x \in [0,1],$$

demgemäß werde $\prod_{j=1}^{N} \mathbb{R}^{[0,l_j]}$ mit $(\mathbb{R}^N)^{[0,1]}$ identifiziert durch

$$\P \qquad (g_j)_{N\times 1} \longmapsto \big(x \mapsto (g_j(xl_j)_{N\times 1}\big).$$

Sofern Verwechselungen ausgeschlossen bleiben, werde auch $u \in \mathbb{R}^G$ durch $\P$ als Funktion $u = (u_j) : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ aufgefaßt, d.h. mit $u_j$ aus (1.4) $u_j(x) := u_j(xl_j) = u(\pi_j(xl_j))$.
Zur Abkürzung sei

$$a = (a_j),\ b = (b_j),\ c = (c_j),\ f = (f_j) \text{ und}$$
$$Q = [0,1] \times [0,T]$$
$$S = \{0,1\} \times [0,T]$$
$$S_o = \{(0,0)\ ,\ (1,0)\}.$$

Die Skalierung auf $[0,1]$ erzeugt zu $|\cdot|_\Omega^{(\mu+\alpha)}$ äquivalente Normen auf $C^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega)$, solange $\mu+\alpha \le 3$ bleibt, insbesondere sind die oben eingeführten Abbildungen in dem Diagramm stetig.

$$\begin{array}{ccc} & & C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega) \\ & \swarrow & \big\uparrow (\mathbb{R}^G \cong \Pi(G)) \\ C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q,\mathbb{R}^N) & \cong & \prod_{j=1}^{N} C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_j) \\ \P & & \end{array}$$

Natürlich liegen a, b, c und f im allgemeinen nicht in $C(\Omega)$, sind also i.a. in den Verzweigungsknoten nicht wohldefiniert, was hier bewußt zugelassen wird.

Aus $\mathcal{L}_j$ wird wegen $\frac{\partial}{\partial x} = l_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ in $[0,l_j]$

$$\mathcal{L}_j(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) := \mathcal{L}_j(xl_j,t,\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} - a_j \frac{1}{l_j^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_j \frac{1}{l_j}\frac{\partial}{\partial x} - c_j,$$

(3.2.b) heißt jetzt $\operatorname{Diag}_{1\le j\le N}(\mathcal{L}_j)\, u = f$.

Für x=0 und x=1 erscheinen (3.2.a,c,d1,d2,d3) nun als Randbedingungen, die zu einer System - Randbedingung der Form LSU VII.§9 (9.1)

$$\mathcal{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})\, u\Big|_S = \Phi : S \to \mathbb{R}^N$$

zusammengefaßt werden sollen, wobei der Rang des Hauptteiles von $\mathcal{B}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^2)$ bzgl. $\lambda$ und geeigneter Homogenitätsexponenten $\sigma_j$ und $t_k$ in S gleich der Zahl N der Kanten sein muß. Um bei 0 und 1 die richtigen Argumente zu setzen, werden auf G und $\Gamma$ die elementaren Operationen (3.5 - 7) eingeführt, wozu die folgende einfache Bemerkung vorangestellt wird.

(3.4) In $H = [r_1,r_3]\times[0,T]$ sei folgende Aufgabe gestellt

$$(\dagger)\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}u := u_t - \hat{a}\,u_{xx} - \hat{b}\,u_x - \hat{c}\,u = \hat{f} \text{ in } (r_1,r_3)\times(0,T] \\ u\Big|_{t=0} = \phi \in C^{2+\alpha}([r_1,r_3]), \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten von $\hat{\mathcal{L}}$ (3.1) und (3.3.a) erfüllen und $\hat{f}$ (3.3.b). Gibt es dann zu $r_2 \in (r_1,r_3)$ Lösungen $u_\iota \in C^{2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}([r_\iota,r_{\iota+1}]\times[0,T])$ von

$$\hat{\mathcal{L}}u_\iota = \hat{f} \text{ in } (r_\iota,r_{\iota+1})\times(0,T],\ u_\iota\Big|_{t=0} = \phi\Big|_{[r_\iota,r_{\iota+1}]}$$

für $\iota=1,2$, sodaß für alle $t\in[0,T]$

$(\dagger\dagger)$ $u_1(r_2,t) = u_2(r_2,t)$ und $u_{1x}(r_2,t) = u_{2x}(r_2,t)$,

so liegt

$$u := u_1 \cup u_2 = \left((x,t)\longmapsto\begin{cases} u_1(x,t) \text{ für } r_1\le x\le r_2 \\ u_2(x,t) \text{ für } r_2\le x\le r_3 \end{cases}\right)$$

in $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(H)$ und ist Lösung von $(\dagger)$.

Beweis Wegen $(\dagger\dagger)$ ist nämlich $u_{1t}(r_2,\cdot)=u_{2t}(r_2,\cdot)\in C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T])$, und $u_{xx}$ stetig bei $r_2$, da die Koeffizienten von $\hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{f}$ in H stetig sind. Also ist $u\in C^{2,1}(H)$ Lösung von $(\dagger)$, und aus der Differentialgleichung und den Voraussetzungen an $u_\iota$ folgt sofort, daß $u_{xx}\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(H)$. Q.e.d.

Unter der Teilung einer Kante $k_j$ werde folgende Operation verstanden:

(3.5) Als neue Ecke eines topologischen Graphen $\Gamma'$ wird

$$E'_{n+1} = \pi_j(l_j/2)$$

gebildet und dann gesetzt

$$n' = n+1 \qquad N' = N+1$$

$$l'_j = l_j/2 \qquad l'_{N+1} = l'_j$$

$$k'_j = \pi_j([0,l'_j]) \qquad k'_{N+1} = \pi_j([l'_j,l_j])$$

$$E' = E \cup \{E'_{n+1}\} \qquad K' = \{k'_j,k'_{N+1}\} \cup K \setminus \{k_j\}$$

$$\Gamma' = (E',K') \qquad G' = \bigcup_{k' \in K'} k'.$$

Im Bezug auf die ARWA (3.2) werden durch Einschränkung und entsprechende Umbenennung der Indices $\Omega'$,a' b',c',f',$\mathcal{L}'$ und $\psi'$ gebildet, und zu $E_r = \pi_r(0)$ und $E_s = \pi_s(l_s)$ in G wird gesetzt für C' in G'

$$c'_{rj} = c_{rj} \qquad c'_{s,N+1} = c_{sj}$$

$$c'_{n+1,j} = c'_{n+1,N+1} = 1.$$

Dann erfüllen die gestrichenen Größen die Voraussetzungen von (3.3), insbesondere die Kompatibilitätsbedingungen 1),3) und 5) bei $E'_{n+1}$, weil die Koeffizienten und $\psi_j$, $\psi_{jx_j}$ und $\psi_{jx_jx_j}$ in $[0,l_j]$ stetig sind.

Wegen (3.4) ist also u' genau dann in $\Omega'$ Lösung von (3.2) im Sinne von (3.3), wenn u eine solche in $\Omega$ ist.
In (3.5) bleiben G und G' als Mengen gleich. Anders ist dies im Falle (3.6) der Verdoppelung einer Kante $k_j$ im Bezug zur ARWA , die nur in der Situation

$$\pi_j(0) = E_r,\ \pi_j(l_j) = E_s\ ,\ E_r,E_s \in \operatorname{Int} E$$

erklärt wird.

(3.6) Als neue Kante $k'_{N+1}$ wähle man die Spur eines $c^3$-Weges im $\mathbb{R}^m$, der $E_r$ mit $E_s$ verbindet und die Länge $l = l'_{N+1}$ hat, mit

$$k'_{N+1} \cap G = \{E_r,E_s\}.$$

Alle gestrichenen Größen beziehen sich auf den topologischen Graphen $\Gamma'$:

$$E' = E,\quad K' = K \cup \{k'_{N+1}\},\quad \Gamma' = (E',K'),$$

$N' = N+1$, $G' = G \cup k'_{N'}$, $\Omega' = G' \times [0,T]$ usw.
In $\Omega$ als Teilmenge von $\Omega'$ werden alle Größen und Funktionen beibehalten, insbesondere wird $c'_{rj} = c_{rj}$ und $c'_{sj} = c_{sj}$ gesetzt. Auf $k'_{N'}$ hingegen erklärt man mittels der Skalierung $\sigma(x_{N'}) = x_{N'} l_j (l'_{N'})^{-1}$

$$a'_{N'}(x_{N'},t) = a_j(\sigma(x_{N'}),t)$$

und entsprechend $b'_{N+1}$, $c'_{N+1}$, $f'_{N+1}$ und $\psi'_{N+1}$, außerdem

$$\mathcal{L}'_{N'}(x_{N'},t,\frac{\partial}{\partial x_{N'}},\frac{\partial}{\partial t}) = \mathcal{L}_j(\sigma(x_{N'}),t,\frac{l'_{N'}}{l_j}\frac{\partial}{\partial x_{N'}},\frac{\partial}{\partial t}) \text{ und}$$

(1) $c'_{r,N+1} = c'_{s,N+1} = 0.$

Erweitert man die Matrix C gemäß (3.6.1) zur Matrix C', so stellt (3.2.c) mit Matrix C' keine KIRCHHOFFregel im Sinne von (1.5) mehr dar. Der Fortgang wird zeigen, daß sich dennoch eine sachgemäße Aufgabe gewinnen läßt. $\Gamma'$ ist zwar nicht mehr einfach, vgl.(1.1), doch wird (3.6) nur als Schritt in der folgenden Operation benötigt.

(3.7) Sei $k_j$ eine Kante von $\Gamma$ mit $\pi_j(0) = E_r$ und $\pi_j(l_j) = E_s$, wobei $E_r, E_s \in \operatorname{Int} E$. Zur Abkürzung werden $\pi_j$ und alle weiteren Parametrisierungen $\pi$ analog ¶ S.33 auf $[0,1]$ erklärt. Gemäß (3.5) wird $k_j$ zunächst so geteilt, daß

$$\pi'_j(0) = E_r \text{ und } \pi'_{N+1}(1) = E_s$$

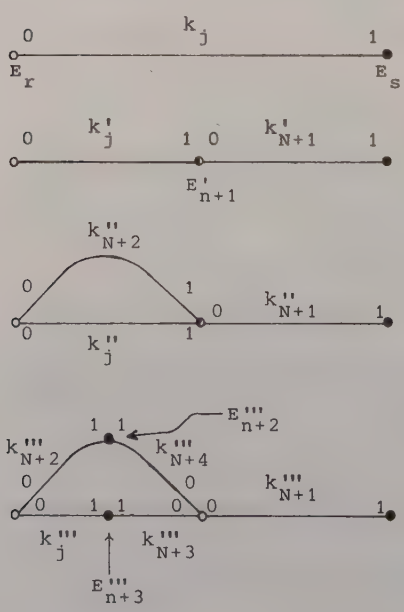
in $\Gamma'$ gilt. Dann wird $k'_j$ gemäß (3.6) verdoppelt, sodaß in $\Gamma''$ gilt

$$\pi''_j(0) = \pi''_{N+2}(0) = E_r.$$

Nochmals gemäß (3.5) werden nun $k''_j$ und $k''_{N+2}$ in einem Schritt geteilt, so daß mit

$$\{E'_{n+1}\} = k'_j \cap k'_{N+1}$$

in dem schließlich ent-



standenen $\Gamma'''$ folgende Inzidenzen bestehen, die auch die Orientierung festlegen:

$$E'''_s = E_s = \pi'''_{N+1}(1)$$

$$E'''_r = E_r = \pi'''_{N+2}(0) = \pi'''_j(0)$$

$$E'''_{n+1} = E'_{n+1} = \pi'''_{N+1}(0) = \pi'''_{N+3}(0) = \pi'''_{N+4}(0)$$

$$E'''_{n+2} = \pi'''_{N+2}(1) = \pi'''_{N+4}(1)$$

$$E'''_{n+3} = \pi'''_{N+3}(1) = \pi'''_j(1).$$

Zur Vereinfachung wird $\Gamma^\circ := \Gamma'''$ gesetzt, und gemäß (3.5) und (3.6) werden alle Größen, Funktionen und die ARWA (3.2) auf $G^\circ$ und $\Omega^\circ$ erklärt. $\Gamma^\circ$ erfüllt (1.1) und ist paar, falls $\Gamma$ paar ist, ferner gilt

$$n^\circ = n + 3 \quad \text{und} \quad N^\circ = N + 4.$$

(3.7.1) Die Lösbarkeit im Sinne von (3.3) der modifizierten ARWA (3.2) auf $\Omega^\circ$ zieht die Lösbarkeit im Sinne von (3.3) der ARWA (3.2) auf $\Omega$ nach sich.

Nach (3.6.1) ist nämlich $c^\circ_{r,N+2} = c^\circ_{n+1,N+4} = 0$, sodaß dann durch Fortfall der Kanten $k^\circ_{N+2}$ und $k^\circ_{N+4}$, also durch Einschränkung auf $\Omega$ das in (3.3) gesuchte u nach (3.4) gefunden ist. Man beachte, daß $G \subset G^\circ$ und $\Omega \subset \Omega^\circ$.
Alle Voraussetzungen von (3.2) und (3.3) bleiben auf $\Omega^\circ$ erfüllt, nur daß die Koeffizienten der Matrix $C^\circ$ zur Regel (3.2.c) von der Bedingung $d^\circ_{ij} \neq 0 \Rightarrow c^\circ_{ij} > 0$ zwei Ausnahmen machen. Entscheidend ist, daß wegen (3.3.1,2,3) weiterhin die Kompatibilitätsbedingung 5) erfüllt ist, weshalb unter (3.6.1) gerade die entartete KIRCHHOFFbedingung erklärt werden mußte. Wegen der Stetigkeitsforderung in Int E stimmen die Lösungen auf den verdoppelten Kanten bis auf Skalierung überein, da sie die gleiche ARWA auf $\Omega'_j$ lösen. Anschaulich denkt man sich dabei die Lösung auf einer Kante als nochmals daneben befindlich, ohne daß von der neuen Kante etwas nach G fließt. Die Teilungen in (3.7) dienen nur zur Zweiteilung des Graphen.

Wie oben werden nun die Parametrisierungen der Kanten nach ¶ S.33 auf [0,1] erklärt: $\pi_j(x) := \pi_j(x\, l_j)$. Nach eventueller und durch (3.4) zulässiger Teilung von Kanten (3.5), kann o.B.d.A angenommen werden, daß

(A) $\Gamma$ paar ist.

Dann - und nur dann - kann eine Orientierung von $\Gamma$ und G gewählt werden, durch die die Verzweigungsknoten nur Anfangspunkte $(x=0)$ der inzidenten Kanten oder nur Endpunkte $(x=1)$ der inzidenten Kanten sind. Zu $\iota = 0, 1$ werde gesetzt

$$\mathcal{N}_\iota = \{i : 1 \le i \le n,\ E_i \text{ ist } \iota\text{-Punkt}\} \qquad n_\iota = |\mathcal{N}_\iota|$$

$$\mathcal{N}_\iota^r = \{i \in \mathcal{N}_\iota : 1 < \gamma_i\} \qquad n_\iota^r = |\mathcal{N}_\iota^r|$$

$$n_\iota^\partial = n_\iota - n_\iota^r = |\{i \in \mathcal{N}_\iota : \gamma_i = 1\}|$$

$$\Sigma_\iota = \sum_{i \in \mathcal{N}_\iota^r} (\gamma_i - 1)\ , \text{ und}$$

$$\mu = \begin{cases} n_0^r - n_1^r & \text{im Falle (3.2.d1)} \\ n_0 - n_1 & \text{im Falle (3.2.d2 und d3).} \end{cases}$$

Da $N = \sum_{i \in \mathcal{N}_\iota} \gamma_i$, ist $\Sigma_\iota = N - n_\iota$ und $\mu = \Sigma_1 - \Sigma_0 + n_1^\partial - n_0^\partial$ im Falle (d1) und $\mu = \Sigma_1 - \Sigma_0$ im Falle (d2 und 3).

Die Homogenitätsexponenten zum Hauptteil $\mathfrak{B}_o$ der gesuchten Matrix $\mathfrak{B}$ müssen für x=0 und x=1 gleich sein, während die Zeilen von $\mathfrak{B}_o$ linear unabhängig sein müssen, vgl.LSU VII §9 p.605sqq. Es muß daher die Zahl $\sigma$ der Zeilen, die den Wohldefiniertheitsbedingungen (3.2.a) in Int E und den DIRICHLETrandbedingungen (3.2.d1) entsprechen, und es muß die Zahl $\delta$ der Zeilen, in denen Ableitungen bei $\partial G$ auftreten, unabhängig von $x = 0,1$ sein. Da die Stetigkeitsforderung in einem Verzweigungsknoten $E_i$ genau $\gamma_i - 1$ Gleichungen entspricht, bedeutet dies gerade wegen $N = \sigma + \delta + n_\iota^r$

(B) $\mu = 0$.

Natürlich wird die Bedingung (B) im allgemeinen nicht er-

füllt sein, doch kann man sich durch geeignete Erweiterung von G und $\Gamma$ mit Hilfe von (3.5) und (3.7) wie folgt auf den Fall (B) zurückziehen. Sei etwa

$$(C) \quad \mu > 0,$$

andernfalls vertausche man 0 und 1. Im Falle

$$(C1) \quad n_0^r = 0$$

kann nur die Randbedingung (d2) oder (d3) vorliegen. $\Gamma$ ist dann ein Stern, in dem der Verzweigungsknoten 1 - Punkt ist, und es gilt $\mu = N-1$. Durch Teilung (3.5) von N-1 Kanten erhält man einen topologischen Graphen $\Gamma^*$, indem $\mu^* = 0$ gilt, wenn die Teilungspunkte allesamt 0 - Punkte sind, wodurch auch $\Gamma^*$ paar wird.

Im Falle

$$(C2) \quad n_1^r = 0$$

muß $\Gamma$ ein Stern sein, in dem der Verzweigungsknoten 0-Punkt ist, es kann also nur die Randbedingung (d1) vorliegen. Durch Teilung (3.5) einer Kante und Festlegung des Teilungspunktes als 1 - Punkt erhält man als gesuchten Graphen $\Gamma^*=\Gamma'$ mit $n_1^r{}^* = 1$ und $\mu^* = 0$. (C1) und (C2) sind somit auf (B) zurückgeführt. Es liege nun der Fall

$$(C3) \quad n_0^r > 0 \text{ und } n_1^r > 0$$

vor. Ist $n_0^\partial > 0$, so können durch Teilung (3.5) der $n_0^\partial$ Kanten, die zu $\partial G \cap \{E_i : i \in \mathcal{N}_0\}$ führen, diese Randecken in 1 - Punkte verwandelt werden, so daß dann gilt:

$$n_0^{\partial\,\prime\prime\ldots\ldots\prime} = 0.$$

Es kann daher o.B.d.A angenommen werden, daß

$$(D) \quad n_0^\partial = 0.$$

Aus $\Sigma_1 - \Sigma_0 = n_0^r - n_1^r + n_0^\partial - n_1^\partial$ folgt dann sofort

(E) $\mu \leq n_0^r$.

Man wähle nun einen Verzweigungsknoten $E_r$ mit $r \in \mathcal{N}_0^r$ und einen zu $E_r$ benachbarten $E_s$ mit $s \in \mathcal{N}_1^r$, welchen man wegen des Zusammenhanges von G finden kann. Die $E_r$ mit $E_s$ verbindende Kante $k_j$ wird nun der Operation (3.7) unterzogen, so daß aus G und $\Gamma$ das $c^3$-Netzwerk $G^\circ$ mit $\Gamma^\circ$ ensteht. Bei Übernahme aller Bezeichnungen von (3.7) und sinngemäßer Übertragung entstehen zur ARWA an den folgenden Ecken zusätzliche oder neue Bedingungen (3.2)(a)und(c), deren Anzahlen in einer Tabelle zusammengefaßt werden,

| | 0 - Punkte | | | 1 - Punkte | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_r^\circ$ | $E_{n+1}^\circ$ | $\mathcal{N}_0^{r\circ}$ | $E_{n+2}^\circ$ | $E_{n+3}^\circ$ | $\mathcal{N}_1^{r\circ}$ |
| neue Stetigkeitsgleichungen | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| neue KIRCHHOFFbedingungen | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

und es gilt

$$n^\circ = n+3,\ N^\circ = N+4,\ n_1^{r\circ} = n_1^r+2,\ n_0^{r\circ} = n_0^r+1,\ n_1^{\partial\circ} = n_1^\partial,$$

(F) $\mu^\circ = \mu - 1$.

Dieser Vorgang wird $\mu$ - mal wiederholt, und zwar so, daß

(G1) jedesmal ein Verzeigungsknoten $E_r$ von G, der 0 - Punkt ist, gewählt wird und

(G2) zum Schluß genau $\mu$ verschiedene solche Verzweigungsknoten von G gewählt worden sind.

(G2) ist wegen (E)möglich und (G1) deshalb, weil bei (3.7) Int E $\subset$ Int $E^\circ$ bleibt und die Paarung von $G \subset G^\circ$ nicht verändert wird. So entsteht ein $c^3$-Netzwerk $G^* := G^{\circ\cdots\circ}$ mit zugehörigem $\Gamma^*$, das bei sinngemäßer Übernahme aller Bezeichnungen die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$n^* = n + 3\mu \qquad N^* = N + 4\mu$$

$$n_0^{r*} = n_0^r + \mu \qquad n_1^{r*} = n_1^r + 2\mu$$

$$\Sigma_1^* - \Sigma_0^* = \Sigma_1 - \Sigma_0 - \mu \qquad n_{0,1}^{\partial *} = n_{0,1}^\partial$$

(B) $\mu^* = 0$.

Wegen (G1) und (G2) und nach dem Vorgehen in (3.7) kann an jedem Verzweigungsknoten von $G^*$ in der entsprechenden Zeile der Matrix $C^*$ höchstens eine Ausnahme von der Bedingung $E_i^* \in k_j^* \Rightarrow c_{ij}^* > 0$ bestehen. Nach Konstruktion von $G^*$ und $\Gamma^*$ gibt es nämlich gerade $2\mu$ Verzweigungsknoten in $G^*$, $\mu$ aus Int E und $\mu$ aus Int $E^* \setminus$ Int E, an denen genau einmal $c_{ij}^* = 0$ und $d_{ij}^* \neq 0$ gilt. Als Matrix zur (3.2.c) entsprechenden Regel auf $\Gamma^*$ erfüllt $C^*$ also sicher (H):

$$(H) \quad \left(\gamma_i^* > 1 \Rightarrow |\{j : d_{ij}^{*2}\, c_{ij}^* > 0\}| \geq \gamma_i^* - 1\right).$$

Insgesamt sind in allen Fällen unter (C) $G^*$ und $\Gamma^*$ mit $\mu^*=0$ gefunden, so daß die Übertragung der ARWA (3.2) gemäß (3.5 - 7) auf $\Omega^*$ zu einer (3.2) äquivalenten ARWA führt, indem die Lösbarkeit der einem im Sinne von (3.3) diese der anderen nach sich zieht, vgl. (3.5) und (3.7.1). Dabei ist nur zu beachten, daß $C^*$ der allgemeineren Bedingung (H) genügt.

Nach der Reduktion des Falles (C) auf (B), werde zur Vereinfachung statt $G^*$ wieder G usw. geschrieben und $\mu = 0$ angenommen, wobei C aus (3.2.c) (H) erlaubt ist. $\mu=0$ bedeutet

$$(I) \quad n_0^r = n_1^r \text{ und } \Sigma_0 + n_0^\partial = \Sigma_1 + n_1^\partial \text{ im Falle (d1)}$$
$$n_0 = n_1 \text{ und } \Sigma_0 = \Sigma_1 \text{ im Falle (d2) oder (d3).}$$

Mit

$$\kappa := \begin{cases} n_0^r & \text{im Falle (d1)} \\ n_0 & \text{im Falle (d2) oder (d3)} \end{cases}$$

seien $i = 1,..,\kappa$ die Indices der Ecken zu $\mathcal{N}_1^r$ bzw. $\mathcal{N}_1$ und $i = \kappa+1,..,2\kappa$ die Indices der Ecken zu $\mathcal{N}_0^r$ bzw. $\mathcal{N}_0$. Zu jedem $E_i \in$ Int E mit $i \in \mathcal{N}_\iota^r$ werden beliebig, aber fest $\gamma_i - 1$ Paare von Kantenindices

$$(J_1(\iota), J_2(\iota,\ell)) \text{ mit } d_{iJ_1(\iota)}\, d_{iJ_2(\iota,\ell)} = 1 \text{ und}$$
$$J_1(\iota) \neq J_2(\iota,\ell) \text{ für } 1 \leq \ell \leq \gamma_i - 1,\ |\{J_2(\iota,\ell) : 1 \leq \ell \leq \gamma_i - 1\}| = \gamma_i - 1$$

gewählt, wobei die erste Komponente in allen Paaren zu $E_i$ gleich ist und auf die Angabe i bei J verzichtet werden kann, da die beiden Kantenindices die Ecke festlegen. Insgesamt gibt es $\Sigma_\iota$ zu $\mathcal{N}_\iota^r$ gehörende solche Paare, die jetzt mit $\Lambda = 1,..,\Sigma_\iota$ numeriert werden zu $(J_1(\iota;\Lambda), J_2(\iota;\Lambda))$, $\iota=0,1$.

(3.8) Definition der Matrix $\mathfrak{B}$ Zu $1 \le k \le N$ werde gesetzt

(1) für $1 \le i \le \kappa$

$$B_{ik}(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = x\, d_{ik} \frac{c_{ik}}{l_k} \frac{\partial}{\partial x} + (1-x) d_{i+\kappa,k} \frac{c_{i+\kappa,k}}{l_k} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$((+ x\, d_{ik}^2 \rho_{i1} + (1-x) d_{i+\kappa,1}^2 \rho_{i+\kappa,1})),$$

wobei der in $((\ldots\ldots))$ gesetzte Ausdruck nur im Falle (d3) der dritten Randbedingung auftritt,

(2) für $\kappa+1 \le j \le N$ und $\iota \in \{0,1\}$

$$B_{jk}(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = (1-x)\, B_{jk}(0,t) + x\, B_{jk}(1,t), \text{ wobei}$$

1) für $\kappa+1 \le j \le \Sigma_\iota + \kappa$

$$B_{jk}(\iota,t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } k = J_1(\iota; j-\kappa) \\ -1 & \text{falls } k = J_2(\iota; j-\kappa) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und noch im Falle (d1) der DIRICHLETrandbedingung

2) für $1+n_\iota^r + \Sigma_\iota \le j \le N$, mit $j - n_\iota^r - \Sigma_\iota = i - 2\kappa - (1-\iota) n_1^\partial$

$$B_{jk}(\iota,t) = \begin{cases} d_{ik}^2 & \text{falls } 2\iota - 1 = d_{ik} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3) $\mathfrak{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) := \left(B_{jk}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\right)_{N\times N}$.

Erklärt man noch auf S den N - Vektor $\Phi$ als $\Phi = 0$ im Falle (d2) oder (d3) und als $\Phi = (\Phi_j)_{N\times 1} = x\Phi^0 + (1-x)\Phi^1$ mit

$$\Phi_j^\iota(t) := \begin{cases} \psi_i(t) & \text{falls } 1 \le j - N + n_\iota^\partial = i - 2\kappa - (1-\iota) n_1^\partial \le n_\iota^\partial \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Falle (d1), so sind (3.2.a,c,d1,d2,d3) auf die gesuchte Form einer System - Randbedingung gebracht:

(3.8.4) $$\mathfrak{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\, u\Big|_S = \Phi.$$

(3.8.1) entspricht der KIRCHHOFFbedingung mit Matrix C und

der NEUMANN- oder 3. Randbedingung, (3.8.2.1) der Wohldefiniertheit (Stetigkeit) in den Verzweigungsknoten, sowie (3.8.2.2) der DIRICHLETrandbedingung, wobei dort i gerade die $n_1^{\partial}$ Ecken aus $\partial G \cap \{E_i : i \in \mathcal{N}_1\}$ durchläuft: Im Falle (d1) seien $i = 2\kappa + 1, \ldots, 2\kappa + n_1^{\partial}$ die Indices der Ecken aus $\partial G \cap \{E_i : i \in \mathcal{N}_1\}$ und $i = 2\kappa + n_1^{\partial} + 1, \ldots, n$ die Indices der Ecken aus $\partial G \cap \{E_i : i \in \mathcal{N}_0\}$. Wegen (I) ändert sich mit x die Zahl der Zeilen von $\mathfrak{B}$ nicht, in denen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ stehen, wie auf S.38 gefordert ist mithin $\sigma+\kappa = N$ unabhängig von x=0 und x=1.

$$(3.9)\quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$$

$$:= \operatorname*{Diag}_{1\le j\le N} \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{a_j(x,t)}{l_j^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{b_j(x,t)}{l_j}\frac{\partial}{\partial x} - c_j(x,t)\Big)$$

Mit dem so auf Q erklärten Matrixdifferentialoperator $\mathcal{L}$ lautet die Differentialgleichung (3.2.b) also

$$(3.9.1)\qquad \mathcal{L}u = f \text{ in } (0,1)\times(0,T].$$

Wegen (3.1) ist $\mathcal{L}$ stark-parabolisch im Sinne von Definition 7, LSU VII§9 p.604 , daher insbesondere parabolisch im Sinne von SOLONNIKOV, LSU VII§9 Def.4 p.601 und SOLONNIKOV §1. (b=1 und r=N) Mit den Homogenitätsexponenten

$$t_j = 2 \text{ und } s_j = 0 \text{ für } 1\le j\le N$$

ist der Hauptteil der Polynome $\mathcal{L}_j(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^2)$ bzgl. $\lambda$, welcher als die Summe $\mathcal{L}_{jo}$ der Terme von $\mathcal{L}_j$ erklärt ist, die

$$\delta_{jk}\mathcal{L}_{jo}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^2) = \delta_{jk}\lambda^{s_k+t_j}\mathcal{L}_{jo}(x,t,i\xi,p)$$

erfüllt, gerade das Polynom

$$\mathcal{L}_{jo}(x,t,i\xi,p) = p + \frac{a_j(x,t)}{l_j^2}\xi^2,$$

und $\mathcal{L}_o = \operatorname*{Diag}_{1\le j\le N}(\mathcal{L}_{jo})$ der Hauptteil von $\mathcal{L}$. Ebenso ist zu

$$L(x,t,i\xi,p) := \det\big(\mathcal{L}(x,t,i\xi,p)\big)$$

der Hauptteil $L_o(x,t,i\xi,p) = \det(\mathcal{L}_o) = \prod_{j=1}^{N}(p + \frac{a_j(x,t)}{l_j^2}\xi^2)$.

(3.9.2) Bezeichnet $\tau_j^+(x,t,p)$ die Wurzel mit positivem Imaginärteil von $\mathcal{L}_{j_o}(x,t,i\tau,p) = 0$ zu $(x,t) \in Q$ und $0 \neq p \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} p \geq 0$ und $1 \leq j \leq N$, so sei

$$L^+(x,t,\tau,p) = \prod_{j=1}^{N} (\tau - \tau_j^+(x,t,p)).$$

Zu $\mathfrak{B}$ werden nun Homogenitätsexponenten so bestimmt, daß später die Komplementaritätsbedingung erfüllt ist. Sei $\beta_{jk}$ der Grad von $B_{jk}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^2)$ als Polynom in $\lambda$ und sei

$$\sigma_q = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leq q \leq \kappa \\ -2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

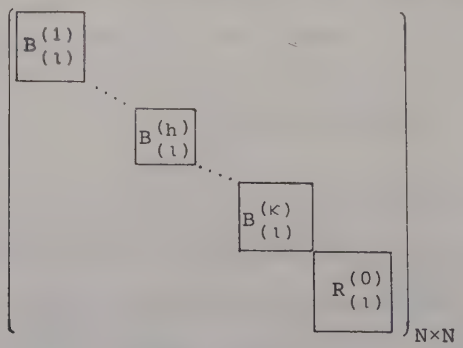
so daß $\sigma_q + t_k = \beta_{qk}$ für $1 \leq q,k \leq N$. Ist $B^\circ_{jk}$ die Summe aller Terme von $B_{jk}$, die der Homogenitätsbedingung

$$B^\circ_{jk}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^2) = \lambda^{\sigma_j + t_k} B^\circ_{jk}(x,t,i\xi,p)$$

genügen, so ist der Hauptteil $\mathfrak{B}_o = (B^\circ_{jk})$ von $\mathfrak{B}$ bzgl. $\lambda$ und der Exponenten $\sigma_j + t_k$, $1 \leq j,k \leq N$, in den Fällen (d1) und (d2)

$$\mathfrak{B}_o(x,t,i\xi,p) = \mathfrak{B}(x,t,i\xi), \quad x \in \{0,1\},$$

was bei der 3. Randbedingung (d3) entsprechend gilt, wenn man nur den in $((\ldots))$ gesetzten Ausdruck in (3.8.1) ausstreicht. Die Matrizen $\mathfrak{B}_o(0,t,i\xi)$ und $\mathfrak{B}_o(1,t,i\xi)$ sind zerlegbar, durch geeignete Permutationsmatrizen nämlich ähnlich zu der folgenden Blockdiagonalmatrix mit $n_l$ Blöcken. ($l=0,1$)



Darin ist $R_{(l)}^{(0)} = I_{(\kappa-n_l^r)\times(\kappa-n_l^r)}$ und

$$B_{(l)}^{(h)} = \begin{pmatrix} d_{hk_1}\frac{c_{hk_1}}{l_{k_1}} i\xi & \cdots\cdots & d_{hk_\eta}\frac{c_{hk_\eta}}{l_{k_\eta}} i\xi & \cdots\cdots & d_{hk_{\gamma_h}}\frac{c_{hk_{\gamma_h}}}{l_{k_{\gamma_h}}} i\xi \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \vdots & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\gamma_h \times \gamma_h}$$

mit einer passenden Numerierung der $\gamma_h$ mit $E_h$ inzidenten Kanten im Falle $\gamma_h > 1$, und

$B_{(l)}^{(h)} = (d_{hk}\, c_{hk}\, i\xi)$, falls $\gamma_h = 1$ und $d_{hk} = 2l - 1$. ($c_{hk} > 0$ !)

Die Matrix $B_{(l)}^{(h)}$ entspricht natürlich der Stetigkeitsforderung und der KIRCHHOFFbedingung im Verzweigungsknoten eines Sternes. Wegen (H) und (G1) ist rang $B_{(l)}^{(h)} = \gamma_h$, insgesamt also

(3.10) $\qquad$ rang $\mathfrak{B}_o(x,t,i\xi) = N$ über $\mathbb{C}[\xi]$ in S.

(3.11) Behauptung $\mathfrak{B}_o$ und $\mathfrak{L}_o$ erfüllen die Komplementaritätsbedingung (LSU VII§9 p.611 oder SOLONNIKOV §1p.11) :

In jedem Punkte $(x,t) \in S$ und für jedes $0 \neq p \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} p \geq 0$ sind die Zeilen der Matrix

$$\mathcal{M}(x,t,i\tau,p) := \mathfrak{B}_o(x,t,i\tau,p)\; L_o(x,t,i\tau,p)\; \mathfrak{L}_o^{-1}(x,t,i\tau,p)$$

linear unabhängig modulo $L^+(x,t,\tau,p)$ als Polynom in $\tau$.

Beweis Mit $\mathcal{M} = (M_{jk})_{N\times N}$ ist wegen

$$L_o\, \mathfrak{L}_o^{-1} = \operatorname*{Diag}_{1\leq j\leq N} \prod_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{N} \left(p + \frac{a_r(x,t)}{l_r^2}\tau^2\right)$$

$$M_{jk}(x,t,i\tau,p) = \begin{cases} d_{jk}\frac{c_{jk}}{l_k} i\tau \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N} (p + \frac{a_r(0,t)}{l_r^2}\tau^2), & \text{falls } x=0 \text{ und } 1\leq j\leq \kappa \\ d_{j+\kappa,k}\frac{c_{j+\kappa,k}}{l_k} i\tau \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N} (p + \frac{a_r(1,t)}{l_r^2}\tau^2), & \text{falls } x=1 \text{ und } 1\leq j\leq \kappa \\ \pm \prod_{\substack{r=k\\ r\neq k}}^{N} (p + \frac{a_r(x,t)}{l_r^2}\tau^2), & \text{falls } B^\circ_{jk}=\pm 1 \text{ und } \kappa+1\leq j\leq N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus gibt es Polynome

$$\tilde{M}_{jk}(x,t,\tau,p) = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{jk}^{(s)}(x,t,p)\,\tau^{s-1} \equiv M_{jk}(x,t,i\tau,p) \bmod L^+\mathbb{C}[\tau]$$

mit

$$\operatorname{grad}_\tau \tilde{M}_{jk}(x,t,\tau,p) = \begin{cases} N-1, & \text{falls } 1\leq j\leq \kappa \text{ und } B^\circ_{jk}\neq 0 \\ N-2, & \text{falls } \kappa+1\leq j\leq N \text{ und } B^\circ_{jk}\neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil gerade $M_{jk}(L^+)^{-1} = B^\circ_{jk} L_o\left(L^+\left(\frac{pl_k^2}{a_k} + \tau^2\right)\right)^{-1}$ ist.

Die $N^2$ Zeilenvektoren $[\alpha_{jk}^{(1)},\ldots,\alpha_{jk}^{(N)}]$ werden zur $N\times N^2$ - Matrix

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} \cdots \alpha_{11}^{(N)} & \cdots & \alpha_{1N}^{(1)} \cdots \alpha_{1N}^{(N)} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \ddots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{N1}^{(1)} \cdots \alpha_{N1}^{(N)} & \cdots & \alpha_{NN}^{(1)} \cdots \alpha_{NN}^{(N)} \end{pmatrix}_{N\times N^2}$$

zusammengefaßt, die vermöge geeigneter Permutationen ähnlich zu einer Matrix der gleichen Blockstruktur wie $\mathfrak{B}_o$ ist: In den folgenden Matrizen werde mit * angedeutet, wo mit Sicherheit ein von 0 verschiedenes Element steht, und stehe außerhalb der in [ .. ] gesetzten Ausdrücke immer 0. Mit

$$\mathcal{A}_{(l)}^{(0)} := \begin{pmatrix} [\quad *0] & & \\ & [\quad *0] & \\ & & \ddots \\ & & [\quad *0] \end{pmatrix}_{n\partial_l \times (Nn\partial_l)}$$

im Falle (d1), $\mathcal{A}_{(1)}^{(0)} = \emptyset$ im Falle (d2) oder (d3) und mit

$$\mathcal{A}_{(1)}^{(h)} := \begin{bmatrix} [\quad *] & [\quad *] & [\ldots\ldots *] & [\quad *] & [\quad] \\ [\quad *0] & [\quad *0] & \ddots & & \\ [\quad *0] & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ [\quad *0] & & & [\quad *0] & \end{bmatrix}_{\gamma_h \times (N\gamma_h)}$$

$\uparrow$ N, $\uparrow$ 2N-1, $\uparrow$ $\gamma_h N-1$

erklärt für $1 \leq h \leq \kappa$, ist nach Konstruktion von $\mathfrak{B}$

$$\mathcal{A} \cong \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)}^{(0)} & & & \\ {\scriptstyle N(\kappa - n_1^r)} \times {\scriptstyle \kappa - n_1^r} & & & \\ & \gamma_h \times \gamma_h N & & \\ & & \mathcal{A}_{(1)}^{(h)} & \\ & & & \gamma_\kappa \times \gamma_\kappa N \\ & & & \mathcal{A}_{(1)}^{(\kappa)} \end{bmatrix}_{N \times N^2}$$

In $\mathcal{A}_{(1)}^{(h)}$ sind der N-te und die $(\eta N-1)$-ten Spaltenvektoren, $2 \leq \eta \leq \gamma_h$, linear unabhängig, im Falle (d1) ist rang $\mathcal{A}_{(1)}^{(h)} = n_1^\partial$, insgesamt hat man also

(3.12) rang $\mathcal{A}(x,t,p) = N$ für $(x,t) \in S$ und $0 \neq p \in \mathbb{C}$, Re $p \geq 0$.

Nach Definition von $\tilde{M}_{jk}$ folgt damit rang $\mathcal{M} = N$ über $\mathbb{C}[\tau] / L^+\mathbb{C}[\tau]$. Vgl.auch SOLONNIKOV IV § 14 p.97 sq. zur Komplementaritätsbedingung in der Form (3.12). Q.e.d.

Die Komplementaritätsbedingung (3.11) hat ihre Wurzel in der Methode des Einfrierens der Koeffizienten von $\mathcal{L}_o$ und $\mathfrak{B}_o$ in einem Punkte des zeitlichen Randes S, mit deren Hilfe dort Fundamentalmatrizen zur Lösung zugehöriger Halbraumprobleme gefunden werden können, vgl.LSU VII §§ 9-10 und SOLONNIKOV

I §1 und II. Ein Vorzug der dort entwickelten Theorie besteht darin, daß der Hauptteil $\mathfrak{B}_o$ von der Wahl der Exponenten $t_j$ und $s_k$ abhängt, deren Summe jeweils obere Schranke für den Grad in $\lambda$ von $(\mathcal{L})_{kj}$ sein muß. Hier ist durch $t_j = 2$ und $s_k = 0$ $\sigma_q$ festgelegt. Es sei noch vermerkt, daß hier wegen der räumlichen Dimension 1 in LSU VII (9.4),(9.21),(9.22) usw. und in SOLONNIKOV §1 p.11 natürlich $\zeta = 0$ ist.
Es bleibt die Einordnung der Anfangsbedingung: Mit

$$\phi := (\psi_j)_{N\times 1}$$

gemäß ¶ S.33 gebildet und

$$\mathcal{C} := I_{N\times N}$$

lautet $(d_o)$ jetzt $\mathcal{C}u\big|_{[0,1]\times\{0\}} = \phi$. Mit den Homogenitätsexponenten

$$\rho_q := -t_k = -2 \quad \text{für } 1\leq q,k\leq N$$

ist $\mathcal{C} = \mathcal{C}(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ gleich seinem Hauptteil $\mathcal{C}_o$ als Polynom in $\lambda$ von $\mathcal{C}(x,i\xi\lambda,p\lambda^2)$. $\mathcal{L}_o$ und $\mathcal{C}_o$ erfüllen einfacherweise die Komplementaritätsbedingung LSU VII §9 p.614 und SOLONNIKOV I §1 p.12:

(3.13) Für alle $x \in [0,1]$ sind die Zeilen der Matrix

$$\mathcal{E}(x,p) := \mathcal{C}_o(x,0,p)\ L_o(x,0,0,p)\ \mathcal{L}_o^{-1}(x,0,0,p)$$

linear unabhängig modulo dem Polynom $p^N$.

Es ist nämlich $\mathcal{E}(x,p) = p^{N-1} I_{N\times N}$ und $\operatorname{rang} \mathcal{E}(x,p) = N$ über $\mathbb{C}[p]\ /p^N\,\mathbb{C}[p]$.
Insgesamt ist die ARWA (3.2),wie gefordert,äquivalent zu der folgenden, die wegen (3.11) und (3.13) insbesondere sachgemäß ist.

(3.14)
$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})\ u = f \quad \text{in } Q_p = (0,1)\times(0,T] & (3.9.1)\\ \mathfrak{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\ u\Big|_S = \Phi & (3.8.4)\\ \mathcal{C}u\Big|_{t=0} = \phi \end{cases}$$

Zur Anwendung von SOLONNIKOV Thm.(4.9) fehlt noch der Nachweis der Kompatibilitätsbedingung der Ordnung $[\alpha]$. Dabei gilt die Kompatibilitätsbedingung der Ordnung k, falls für $2i_q + \sigma_q \leq k$, $1 \leq q \leq N$, und $i_q \geq 0$

$$\frac{\partial^{i_q}}{\partial t^{i_q}} \sum_{j=1}^{N} B_{qj}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})\, u_j(x,t)\Big|_{S_o} = \frac{\partial^{i_q}}{\partial t^{i_q}} \Phi(x,t)\Big|_{S_o}$$

mit den durch $u_{jt}(x,0) = \mathcal{A}_j(x,0,\frac{\partial}{\partial x})\psi_j(x) + f_j(x,0)$ iterativ berechneten $\frac{\partial^s}{\partial t^s} u_j(x,t)\Big|_{t=0}$ erfüllt ist, vgl. SOLONNIKOV p.98.

Zu verschiedenen Zeilen von $\mathfrak{B}$ sind also verschiedene Ableitungsordnungen in t zugelassen. Hier ist $k = 0$, daher nur

$$i_q = \begin{cases} 0, \text{ falls } 1 \leq q \leq \kappa \\ 0 \text{ oder } 1, \text{ falls } \kappa+1 \leq q \leq N \end{cases}$$

möglich. In diesen Fällen werden obige Gleichungen von den Kompatibilitätsbedingungen (3.3.4) gedeckt, die auch bei den eventuell notwendigen Operationen (3.5) und (3.7) und Übergang von G zu G* gemäß (C) - (H) erhalten bleiben. Nach (3.8) heißt (3.3.4.1,2,3) gerade

$$\mathfrak{B}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})\,\phi(x) = \Phi(x,0) \text{ für } x \in \{0,1\},$$

was dem Fall $i_q = 0$ entspricht. Da in einem Verzweigungsknoten $E_i$ mit $i \in \mathcal{N}_x$ nach (3.3.4.5)

$$u_{jt}(x,0) = u_{rt}(x,0) \text{ für } d_{ij} = d_{ir} = 2x - 1,\ x \in \{0,1\}$$

ist, sind (3.3.4.4 und 5) gleichwertig zu (vgl.(3.8.2))

$$\sum_{j=1}^{N} B_{qj}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})\, u_{jt}(x,0) = \Phi^x_{jt}(x,0),\ 1+\kappa \leq q \leq N,\ x \in \{0,1\},$$

womit auch der Fall $i_q = 1$ gezeigt ist.

Die Behauptung von (3.3) folgt schließlich mit Hilfe des SOLONNIKOV'schen Satzes, der hier für den Fall $b = 1$, $r = m$ mit den Bezeichnungen von LSU angegeben werde (bis auf $C^{\cdot\cdot}{}'{}^{\cdot\cdot}$ für $H^{\cdot\cdot}{}'{}^{\cdot\cdot}$), gefolgt von einer Übersicht der dort und hier sich entsprechenden Bezeichnungen. Die Homogenitätsexponenten, hier gleich den Graden in $\lambda$, geben gerade die Differenzen zwischen den Differenzierbarkeitsordnungen der Lösung und denen der Koeffizienten und Inhomogenitäten an.

(3.15) Satz (SOLONNIKOV §18 Theorem (4.9) und LSU VII §10 Theorem (10.1)) Sei $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ und $\ell > \max\{0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. Sei $S = \partial\Omega \in C^{\ell + \max_j t_j}$, und die Koeffizienten $L_{kj}$, $B_{qj}$ und $C_{\alpha j}$ von $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$, sowie $f_k$, $\Phi_q$ und $\phi_\alpha$ gehören zu $C^{\ell - s_k, \frac{\ell - s_k}{2}}(\bar{Q}_T)$, $C^{\ell - \sigma_q, \frac{\ell - \sigma_q}{2}}(\bar{S}_T)$ bzw. $C^{\ell - \rho_\alpha}(\bar{\Omega})$, außerdem erfüllen $f_k$, $\Phi_q$ und $\phi_\alpha$ die Kompatibilitätsbedingung der Ordnung $[\ell]$.

Dann existiert genau eine Lösung $u = (u_j)_{m \times 1}$ von (3.14) (SOLONNIKOV §14 (4.17) und LSU VII (9.31)) mit $u_j \in C^{\ell + t_j, \frac{\ell + t_j}{2}}(\bar{Q}_T)$, und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{m} |u_j|_{Q_T}^{(\ell + t_j)} \leq c \left( \sum_{j=1}^{m} |f_j|_{Q_T}^{(\ell - s_j)} + \sum_{q=1}^{r} |\Phi_q|_{S_T}^{(\ell - \sigma_q)} + \sum_{\alpha=1}^{r} |\phi_\alpha|_{\Omega}^{(\ell - \rho_\alpha)} \right)$$

mit einer nur von $\Omega$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $T$ abhängenden Konstanten $c$.

(3.16) Konkordanz

| LSU VII §§ 8-10 | | Hier |
|---|---|---|
| $n$ | räumliche Dimension von $\Omega$ | 1 |
| $m$ | Format von $\mathcal{L}$ | $N$ Kantenzahl |
| $\mathcal{L}$ | §8 Definition 4 | $\mathcal{L}$ (3.9) |
| $\mathcal{B}$ | §9 | $\mathcal{B}$ (3.8) |
| $\mathcal{C}$ | §9 | $I_{N \times N}$ |
| $r$ | } Definition p.601 | $N$ |
| $b$ | } | 1 |
| $t_k$ | $s_k + t_j$ sind die Homogenitäts- | $t_k = 2$ |
| $s_k$ | exponenten von $L_{kj}$, p.601 | $s_k = 0$ |
| | $\sum_k (s_k + t_k) = 2br$ | |
| $\sigma_j$ | $\sigma_j + t_k$ sind die Homogenitäts- | $\sigma_j = \begin{cases} -1, & 1 \leq j \leq \kappa \\ -2, & \text{sonst} \end{cases}$ |
| | exponenten von $B_{jk}$, p.605 | |
| $\rho_j$ | $\rho_j + t_k$ sind die Homogenitäts- | $\rho_j = -2$ |
| | exponenten von $C_{jk}$, p.612 | |

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{\Omega}$ | | $[0,1]$ |
| $\overline{Q}_T$ | | $Q$ |
| $\overline{S}_T$ | | $S$ } vgl.S.33 |
| $S_o$ | | $S_o$ |
| $\delta$ | (8.7) | $\mu_1$ (3.1) |
| $\ell$ | Theorem (10.1) | $\alpha$ (3.3) |
| $c$ | Theorem (10.1) | $K_o$ (3.3) |
| $f$ | | $f = (f_j)$, ¶ S.33 |
| $\Phi$ | } Inhomogenitäten in (9.31) | $\Phi$ (3.8.4) |
| $\phi$ | | $\phi = (\psi_j), \psi \in \Pi(G)$, ¶S.33 |

Die linke Seite der Abschätzung in (3.15) erzeugt eine zu $|\cdot|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ äquivalente Norm auf $C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Omega)$, vgl.S.33. Damit ist der Hauptsatz (3.3) bewiesen.

Der Beweis legt sofort die Verallgemeinerung auf Aufgaben mit über $\partial G \times [0,T]$ gemischten oder inhomogenen Randbedingungen, sowie mit zeitlich abhängiger KIRCHHOFFbedingung nahe, die alle Spezialfälle der folgenden sind.

(3.17) Satz Sei $C(t) = (c_{ij}(t))$ eine $n \times N$ - Matrix mit

$$E_i \in k_j \Longrightarrow c_{ij} > 0 \text{ in } [0,T],$$

und an jeder Ecke $E_i$ seien Funktionen $r_i, \psi_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ vorgegeben. Statt (3.2.c,d1 - d3) werde in E die folgende Bedingung vorgelegt:

(1) $\exists \delta = (\delta_i) \in \{0,1\}^n \; \forall i \in \{1,..,n\} \; \forall t \in (0,T]$:

$$\delta_i + |r_i(t)| > 0 \text{ und}$$

$$\delta_i \sum_{j=1}^{N} d_{ij} c_{ij}(t) u_{jx_j}(E_i,t) - r_i(t) u(E_i,t) = \psi_i(t).$$

Es gelten ferner die Voraussetzungen (3.3.1,2) und (3.3.4.4,5), sowie zusätzlich

(2) $r_i, c_{ij} \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T])$

(3) $\psi \in C^{2+\alpha}(G)$ und $\psi_i \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T])$

(4) $\psi$ erfüllt (3.17.1) für $t = 0$.

Dann besitzt die ARWA $\{(3.2.a,b,d_o)\ \&\ (3.17.1)\}$ genau eine Lösung $u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$, und es gilt dieselbe Abschätzung wie in (3.3).

Zum Beweis muß man abweichend nur

$$\mu = |\{E_i : \delta_i = 1, i \in \mathcal{N}_o\}| - |\{E_i : \delta_i = 1, i \in \mathcal{N}_1\}|$$

zur Reduktion auf (B) und $\kappa = |\{E_i : \delta_i = 1, i \in \mathcal{N}_o\}|$ setzen. Bei analoger Erklärung von $\mathfrak{B}$ (3.8) ist der Hauptteil $\mathfrak{B}_o$ i.a. zwar verschiedenen von $\mathfrak{B}$, doch bis auf eventuelle Aufteilung der Zeilen zu Randecken in solche mit $\sigma_q = -1$ und solche mit $\sigma_q = -2$, bis auf mögliches Auftreten von Zeilen zu Verzweigungsknoten mit $\sigma_q = -2$ und bis auf die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten an den $c_{ij}$ und $r_i$ entsprechenden Stellen besitzt $\mathfrak{B}_o$ die Eigenschaften von dem oben gebildeten, insbesondere hat $\mathcal{A}$ Maximalrang N. $(\delta_i + |r_i| > 0)$ Alles übrige folgt völlig analog.

(3.18) Anmerkungen (1) Der Beweis von (3.3) durch den SOLONNIKOV'schen Satz (3.15) zeigt auch, daß man auf ähnliche Weise ARWAn auf $\Omega$ lösen kann, bei denen lineare Differentialoperatoren $\mathcal{L}_j$ höherer Ordnungen in $t$ $\left(\frac{1}{2b}(s_j+t_j)\right)$ und in $x_j$ $(s_j+t_j)$ auf den Kanten $k_j$ gegeben sind, sofern nur $\det(\delta_{jk}\mathcal{L}_j)$ 2b - parabolisch ist (LSU VII Def.1 p.598), und die Kompatibilitäts- und Komplementaritätsbedingungen erfüllt sind. Von den letzteren wird die für $\mathfrak{B}_o$ und $\mathcal{L}_o$ i.a. zwar verwickelt, jedoch letztlich kanonisch nachzuweisen sein, solange (3.10) gezeigt werden kann. Über den Verzweigungsknoten werden hier lineare Gleichungen zwischen den Ableitungen höherer Ordnungen, einseitig auf den inzidenten Kanten gebildet, vorgegeben sein, speziell etwa KIRCHHOFFregeln für Ableitungen ungerader Ordnungen $(\leq s_j+t_j-1)$ oder etwa paarweise Quotienten für die Ableitungen gerader Ordnung $(\leq s_j+t_j-2)$.
Umgekehrt zeigt das obige Vorgehen, daß man bei Raumdimension 1 in vielen Fällen N×N - Systeme der Form LSU (9.31) auch dann in die SOLONNIKOV'sche KLasse von Problemen einordnen

kann, wenn es zunächst nicht gelingt, von $(x,t) \in S$ unabhängige Homogenitätsexponenten $\sigma_j + t_k$ ($t_k$ vorgegeben) so zu finden, daß $\mathfrak{B}_o$ und $\mathfrak{L}_o$ die Komplementaritätsbedingung erfüllen. Zum Beispiel führt eine (3.7) entsprechende Operation zu einer Komponente j auf ein $(N+4)\times(N+4)$ - System, in dem $\mathfrak{B}$ zu einer vorgegebenen Differenzierbarkeitsordnung s in x an dem einen Intervallende eine Zeile mehr als vorher aufweist und an dem anderen die Zahl dieser Zeilen beibehält, wenn man an den Teilungspunkten als Intervallenden s - mal stetige Differenzierbarkeit vorschreibt. Notwendig ist natürlich immer die Rangbedingung (3.10).

(2) Mit (3.2.a - c) ist im allgemeinen kein Diffraktionsproblem vorgelegt. Besitzt $\Gamma$ Knoten $E_i$ mit $\gamma_i \geq 3$, so ist es nicht möglich, ein Gebiet $[a,b]\times[0,T]$ zu finden, in dem ($\alpha$) die Gleichungen (3.2.b) zu einer äquivalenten skalaren Gleichung zusammengefaßt werden und zu dem ($\beta$) in (a,b) endlich viele Teilungspunkte $t_i$ existieren, so daß (3.2.a,c) Kompatibilitätsbedingungen an den Schnittlinien $\{t_i\}\times[0,T]$ entsprechen. Ist jedoch $\Gamma$ doppelpunktfreier und ungeschlossener Weg, den man als [a,b] auffassen kann, so sind zum Beispiel ($\alpha$) und ($\beta$) erfüllbar, falls entweder $c_{is}(c_{ir})^{-1} = \text{const.}$ für $d_{is}d_{ir} \neq 0$, oder $C(t) = \left(d_{ij}a_j(\pi_j^{-1}(E_i),t)\right)_{n\times N}$, oder für eine Lösung u bei den Schnittlinien $u_x = 0$ gelten muß, vgl. etwa LSU III §13 (3.10,11).

## 4. Lösung semilinearer Reaktions - Diffusions - Gleichungen

Auf G und $\Omega$, mit den Eigenschaften wie im vorigen Abschnitt, wird in diesem die klassische Lösbarkeit des folgenden DIRICHLETproblemes behandelt,

(4.1) (a) $u \in C_K^{2,1}(\Omega)$

(b) für $1 \le j \le N$ gilt in $\Omega_{jp}$

$$u_{jt} = a_j(x_j,t)\, u_{jx_jx_j} + f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})$$

(c) $$u\Big|_{\omega_p} = \Psi\Big|_{\omega_p} \quad \text{mit } \Psi \in C_K^{2,1}(\Omega),$$

wobei die Diffusionskoeffizienten $a_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$ und die Nichtlinearitäten $f_j : \Omega_j \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die nachstehenden Voraussetzungen erfüllen:

(4.2) (1) Alle $a_j$ erfüllen (2.5) (gleichmäßige Parabolizität)

(2) $a_j \in C^{1,0}(\Omega_j)$ für $1 \le j \le N$

(3) $\exists K_1, L_1 \ge 0 \;\; \forall j \in \{1,..,N\} \;\; \forall (x_j,t) \in \Omega_j \;\; \forall z \in \mathbb{R}$:

$$z\, f_j(x_j,t,z,0) \le K_1 z^2 + L_1$$

(4) Definition

$$M_o := \inf_{\lambda > K_1} e^{\lambda T} \max\left\{ |\Psi|_\Omega^{(0)}, \sqrt{\frac{L_1}{\lambda - K_1}} \right\}$$

(5) Jedes $f_j$ sei stetig in $\Omega_j \times [-M_o, M_o] \times \mathbb{R}$.

(6) $\exists K_2, L_2 \ge 0 \;\; \forall j \in \{1,..,N\} \;\; \forall (x_j,t,z,p) \in \Omega_j \times [-M_o, M_o] \times \mathbb{R}$:

$$|f_j(x_j,t,z,p)| \le K_2 p^2 + L_2$$

O.B.d.A. werde angenommen, daß $\max\limits_{1 \le j \le N} |a_{jx_j}|_{\Omega_j}^{(0)} \le L_2$.

(4.1.c) faßt die Randbedingungen (3.2.$d_o$,d1) zusammen. Sind

nämlich $\psi \in C_K^{\mu+\alpha}(G)$ und zu $E_i \in \partial G$ $\psi_i \in C^{\frac{\mu+\alpha}{2}}([0,T])$ vorgegeben, so findet man $\Psi \in C_K^{\mu+\alpha,\frac{\mu+\alpha}{2}}(\Omega)$, das mit den Vorgaben auf $\omega_p$ übereinstimmt, und zwar unter Bewahrung der Norm bis auf Multiplikation mit einer Konstanten; etwa $\Psi(x,t) := \psi_j(x)$, falls $x \in k_j$ und $k_j \cap E \subseteq \operatorname{Int} E$, und im Falle $x \in k_j, E_i \in k_j$ und $\gamma_i = 1$

$$\Psi(x,t) := \psi_j(x) + \left(\psi_i(t) - \psi_j(1_j \tfrac{1+d_{ij}}{2})\right)\left(\frac{x}{1_j} + \frac{d_{ij}-1}{2}\right)^2.$$

Ist u eine Lösung von (4.1), so läßt sich wegen (4.2) $|u|_\Omega^{(0)}$ durch $M_o$ nach (2.7) abschätzen. Die Hauptschwierigkeit besteht naturgemäß darin, $|u_t|$ a priori über Int E abzuschätzen. Gelingt dies jedoch, so gewinnt man für u eine $(1+\beta)$-Abschätzung durch Rückgriff auf bekannte Abschätzungen in $\Omega_j$. Findet man nämlich eine Konstante M* mit

$$\max\{|u_t(E_i,t)| : t \in [0,T],\ E_i \in \operatorname{Int} E\} \le M^*,$$

so gibt es wegen (4.2.1,2,5,6) und nach LSU V Theorem (4.2) eine Konstante

$$(4.2.7)\quad M_4 = M_4(\mu_1,\mu_2,K_2,L_2,M_o,M^*,l_1,\ldots,l_N,T,|\psi|_\Omega^{(2)},\max_j |a_{jx_j}|_{\Omega_j}^{(0)}),$$

so daß

$$\max_{1\le j\le N} |u_{jx_j}|_{\Omega_j}^{(0)} \le M_4.$$

Bei diesem Schritt wird nicht die Voraussetzung LSU V(5.2) gebraucht, zur Abschätzung von $|u_t|_\Omega^{(0)}$ werden hingegen die folgenden Voraussetzungen benötigt:

(4.2) (8) Für $1 \le j \le N$ sind $a_j$, $a_{jx_j}$ und $f_j$ in t lipschitzstetig in $\Omega_j$ bzw. $\mathfrak{M}_j := \Omega_j \times [-M_o, M_o] \times [-M_4, M_4]$, und $f_j$ besitzt dort partielle Ableitungen nach $z = u_j$ und p. (Es wird nicht stetige Differenzierbarkeit verlangt.)

(9) $\exists K_4 \ge 0\ \forall j \in \{1,\ldots,N\}\ \forall (x_j,t,z,p) \in \mathfrak{M}_j$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} f_j(x_j,t,z,p)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial p} f_j(x_j,t,z,p)\right| \le K_4 \text{ und}$$

$$\sup\left\{\left|\frac{f_j(x_j,t+h,z,p) - f_j(x_j,t,z,p)}{h}\right| : t+h \in [0,T]\right\} \le K_4.$$

(4.3) Lemma Sei u Lösung von (4.1), und es gelten die Voraussetzungen (4.2.1-6). Kann man dann $|u_t|$ über allen Verzweigungsknoten durch eine von u unabhängige Konstante M* abschätzen, mit der (4.2.8 - 9) erfüllt sind, so gilt auch eine Abschätzung

$$(1) \quad |u|_{\Omega}^{(1+\beta)} \leq M$$

mit einer Konstanten M und einem Hölderexponenten $\beta \in (0,1)$, die beide nur von $\mu_1, \mu_2$ aus (2.5), $K_2, L_2, K_4, M_o, M^*, \Omega, \eta \in (0,1]$, $|\Psi_t|_{\Omega}^{(0)}$ und $|\Psi|_{t=0}|_G^{(1+\eta)}$ abhängen.

Beweis Nach LSU V Theorem (5.1) und wegen (4.2.8,9) gibt es eine Konstante $M_5$ mit

$$|u_t|_{\Omega}^{(0)} \leq M_5 = M_5(\mu_1, \mu_2, M_o, M_4, M^*, K_4, |\Psi_t|_{\Omega}^{(0)}).$$

Außerdem findet man mit LSU VI Theorem (5.1) einen Exponenten $\beta = \beta(\mu_1, \mu_2, M_4, \eta) \in (0,1)$ und eine Konstante $M_6$

$$M_6 = M_6(\mu_1, \mu_2, M_o, M^*, M_4, |\Psi_t|_{\Omega}^{(0)}, |\Psi|_{t=0}|_G^{(1+\eta)}),$$

so daß die Hölderkonstanten von $u_{jx_j}$ bzgl. $x_j$ sich abschätzen lassen zu

$$\max_{1 \leq j \leq N} H^{\beta}_{x_j, \Omega_j}(u_{jx_j}) \leq M_6.$$

Nach LSU II Lemma (3.1) gilt dann auch für $\delta := \beta(1+\beta)^{-1}$

$$\max_{1 \leq j \leq N} H^{\delta}_{t, \Omega_j}(u_{jx_j}) \leq M_7$$

mit einer Konstanten $M_7 = M_7(M_5, M_6, \beta, l_1, .., l_N, T)$.
Insgesamt folgt, da $2\delta > \beta$,

$$|u|_{\Omega}^{(1+\beta)} \leq \text{const.}(M_o + M_4 + M_6 + M^* + M_7). \qquad \text{Q.e.d.}$$

Mit $\Psi \in C^{2,1}(\Omega)$ ist natürlich $\eta$ beliebig wählbar, und im Falle $\eta = 1$ schließt man mit (4.1.b) und (4.2) zur Abschätzung

$$|u|_{\Omega}^{(2)} \leq M(\mu_1, \mu_2, K_2, L_2, K_4, M_o, M^*, \Omega, |\Psi|_{\Omega}^{(2)}).$$

Ein entsprechendes Lemma gilt auch für allgemeine semilineare Gleichungen statt (4.1.b), vgl. (4.14).
Ziel ist es nun, unter den speziellen Voraussetzungen (4.5)

$|u_t|^{(0)}_{\Omega}$ a priori abzuschätzen, und damit zunächst in diesem Falle den Nachweis der Existenz einer Lösung von (4.1) zu führen.

Zur Abschätzung von $|u_t|$ auf $\omega_p$ werde gesetzt

$$M_2 := \max_{\substack{1\le j\le N\\ 1\le i\le n}} \{ \sup_{0\le x\le l_j} \big| a_j(x,0)\,\psi_{jx_jx_j}(x,0) + f_j\big(x,0,\psi_j(x,0),$$

$$\psi_{jx_j}(x,0)\big)\big|, \sup_{t\in[0,T]} |\psi_t(E_i,t)|\},$$

also $M_2 = M_2(\mu_1,\mu_2,K_2,L_2,\Omega,|\psi|^{(2)}_{\Omega})$.

Mit (4.2.1,2,5,6) ist der Satz (LSU V Theorem (3.1)) über die Abschätzbarkeit von $|u_x|$ in Teilgebieten anwendbar:

(4.4) Zu jedem d mit $0<d\le \frac{1}{2}\min\limits_{1\le j\le N} l_j$ existiert eine Konstante $M_1(d)$

(1) $M_1(d) = M_1\big(d;\mu_1,\mu_2,M_o,K_2,L_2,\Omega, \max\limits_{1\le j\le N} |\psi_{jx_j}|_{t=0}|^{(0)}_{[0,l_j]}\big) < \infty$,

so daß für jede Lösung u von (4.1.a,b) mit $u|_{t=0} = \psi|_{t=0}$ gilt

(2) $\max\{|u_{jx_j}(x_j,t)| : (x_j,t)\in[d,l_j-d]\times[0,T], 1\le j\le N\} \le M_1(d)$.

Es werde noch $M_1(0) := \infty$ gesetzt, was durch LSU V Thm.(3.1) nicht ausgeschlossen wird. Betrachtet werden nun nahe den Verzweigungsknoten die folgenden

(4.5) Voraussetzungen. $\exists \kappa \in (0,\frac{1}{2}\min\{l_1,\dots,l_N\})$:

(1) Alle $a_j$ hängen jeweils in $R^{\kappa}_j$ nicht von t ab, wobei $R^{\kappa}_j := \big([0,\kappa]\cup[l_j-\kappa,l_j]\big)\times[0,T]$.

(2) $\exists K_3\ge 0\ \forall j\in\{1,..,N\}\ \forall x_j\in[0,\kappa]\cup[l_j-\kappa,l_j]$

$\forall (t,z,p)\in[0,T]\times[-M_o,M_o]\times[-M_1(x_j),M_1(x_j)]$:

$$\frac{\partial}{\partial z} f_j(x_j,t,z,p) \le K_3 \quad \text{und}$$

$$\sup_{\substack{0\le t+h\le T\\ h\neq 0}} \left| \frac{f_j(x_j,t+h,z,p) - f_j(x_j,t,z,p)}{h} \right| \le K_3$$

(3) Für $1\le j\le N$ existieren $\frac{\partial}{\partial z} f_j$ und $\frac{\partial}{\partial p} f_j$ jeweils in $R_j^K \times [-M_o, M_o] \times \mathbb{R}$ und bleiben auf beschränkten Mengen beschränkt.

(4) Es gelten (4.2.8,9) mit einer Konstanten $K_4 \ge 0$, wobei nur $M_1(\kappa)$ statt $M_4$, und statt $\mathfrak{M}_j$ jeweils

$$[\kappa, l_j - \kappa] \times [0,T] \times [-M_o, M_o] \times [-M_1(\kappa), M_1(\kappa)]$$

zu setzen ist. O.B.d.A. sei $K_4 = K_3$.

(4.6) Satz Sei u Lösung von (4.1) und es gelten die Voraussetzungen (4.2.1-6) und (4.5).
Dann ist $|u_t|$ über allen Verzweigungsknoten abschätzbar durch eine Konstante M*, die nur abhängt von

$$\mu_1, \mu_2, \kappa, \Omega, M_o, M_1(\kappa/4), M_2, L_2, K_2 \text{ und } K_3.$$

Dieselben Größen bestimmen auch eine Konstante $M_3$ mit

(1) $|u_t|_\Omega^{(0)} \le M_3$.

Beweis Aus (4.1) und (4.2.2,5) folgt zunächst

(A) $\max\{|u_t(x,0)| : x \in G\} \le M_2$,

außerdem bestimmen wegen (4.5.3) $M_o, M_1(\kappa/4)$ aus (4.4), $L_2$ und $K_2$ eine obere Schranke für alle $|\frac{\partial}{\partial z} f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})|$ und $|\frac{\partial}{\partial p} f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})|$ jeweils in $Q_T^j := [\kappa/4, l_j - \kappa/4] \times [0,T]$.
Damit ist die lokale Aussage von LSU V Theorem (5.1) über die Abschätzbarkeit von $|u_t|$ auf $[\kappa/2, l_j - \kappa/2] \times [0,T]$ als Teilgebiet von $Q_T^j$ anwendbar. Es gibt somit eine Konstante

(B) $M_8 = M_8(\mu_1, K_3, M_2, \kappa/4, M_1(\kappa/4), L_2, K_2, M_o)$,

so daß

(C) $\max\{|u_{jt}(x_j,t)| : (x_j,t) \in [\frac{\kappa}{2}, l_j - \frac{\kappa}{2}] \times [0,T], 1\le j\le N\} \le M_8$,

insbesondere wird durch (C) $|u_t|$ für $x_j = \kappa$ oder $x_j = l_j - \kappa$ abgeschätzt. Indem man nötigenfalls $M_2$ durch $\max\{M_2, M_8\}$ ersetzt, indem man mit der folgenden Schlußweise im Falle (D) $|u_t|$ in $\bigcup_{d_{ij}\neq 0} R_j^\kappa$ an jedem Verzweigungsknoten $E_i$ abschätzt und indem man mit dem unten erklärten $M_9$, das nicht von $E_i$ abhängt, zuletzt $M^* := \max\{M_8, M_9\}$ und $M_3 := M_5(M^*,..)$ wie im Beweis zu (4.3) bildet, kann man wegen (C) o.B.d.A. (D) annehmen:

(D) Der zu G gehörende topologische Graph $\Gamma$ ist ein Stern mit Verzweigungsknoten $E_i$ und $\gamma_i$ Kanten der Länge $\kappa$.

Zu genügend kleinem $h>0$ werde $v^h$ in $\Omega_{T-h} := G \times [0, T-h]$ auf den Kanten durch den Differenzenquotienten

$$v_j(x_j,t) := \frac{u_j(x_j,t+h) - u_j(x_j,t)}{h}$$

erklärt, so daß $v^h \in C_K^{2,1}(\Omega_{T-h})$. Mit dem Argument

$$\Xi = \big(x_j, t+h, \tau u_j(x_j,t+h) + (1-\tau)u_j(x_j,t),$$
$$\tau u_{jx_j}(x_j,t+h) + (1-\tau)u_{jx_j}(x_j,t)\big)$$

in den Integranden bildet man

$$B_j^h(x_j,t) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} f_j(\Xi)\,d\tau \qquad C_j^h(x_j,t) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} f_j(\Xi)\,d\tau$$

und außerdem

$$F_j^h(x_j,t) := \frac{1}{h} f_j\big(x_j, t+h, u_j(x_j,t), u_{jx_j}(x_j,t)\big)$$
$$- \frac{1}{h} f_j\big(x_j, t, u_j(x_j,t), u_{jx_j}(x_j,t)\big),$$

so daß wegen (4.5.1) $v_j^h$ in $\Omega_{j,T-h}$ der linearen Gleichung

$$(E)\quad \frac{\partial}{\partial t} v_j^h = a_j v_{jx_jx_j}^h + B_j^h v_{jx_j}^h + C_j^h v_j^h + F_j^h$$

genügt, die man wie üblich aus

$$\frac{1}{h} f_j\left(x_j, t+h, u_j(x_j, t+h), u_{jx_j}(x_j, t+h)\right)$$

$$- \frac{1}{h} f_j\left(x_j, t, u_j(x_j, t), u_{jx_j}(x_j, t)\right)$$

$$\pm \frac{1}{h} f_j\left(x_j, t+h, u_j(x_j, t), u_{jx_j}(x_j, t)\right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f_j(\Xi)\, d\tau + F_j^h(x_j, t)$$

erhält. $B_j^h$ und $C_j^h$ sind wegen (4.5.3,2) beschränkt und $F_j^h$ stetig in $\Omega_{jT-h}$, nach (4.5.2) gilt außerdem für jedes $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\zeta^2 C_j^h(x_j, t) + \zeta F_j^h(x_j, t) \leq \zeta^2 K_3 + (\zeta^2 K_3 + K_3) = K_3(2\zeta^2 + 1).$$

Wegen (4.1) und (4.2.2,5) ist (E) auch einseitig auf jedem $k_j$ über $E_i$ erfüllt, womit der Satz (2.7) auf $v^h$ anwendbar ist:

$$\text{(F)} \quad \max\{|v^h(x,t)| : (x,t) \in \Omega_{T-h}\}$$

$$\leq \inf_{\lambda > K_3} e^{\lambda T} \max\left\{ \max_{\substack{t \leq T-h \\ (x,t) \in \omega_p}} |v^h(x,t)|, \sqrt{\frac{K_3}{\lambda - 2K_3}} \right\}$$

$$\text{(G)} \quad \leq e^{3K_3 T} \max\left\{1, \max_{\substack{t \leq T-h \\ (x,t) \in \omega_p}} |v^h(x,t)|\right\}$$

Mit $h \to 0$ strebt der Ausdruck (G) gegen

$$e^{3K_3 T} \max\left\{1, \max_{(x,t) \in \omega_p} |u_t(x,t)|\right\} \leq e^{3K_3 T} \max\{1, M_2\} =: M_9,$$

womit schließlich insgesamt folgt

$$\text{(H)} \quad |u_t|_\Omega^{(0)} \leq M_9 = M_9(M_2, K_3, T).$$

Damit ist die Behauptung im Falle (D) bewiesen. Nun hat man nur noch $M_3$ wie oben angedeutet zu bilden. Q.e.d.

(4.6.2) Bemerkung Die Anwendung von (2.7) auf (E) ist auch unter denselben Voraussetzungen an alle $f_j$ bei Vorgabe der semilinearen Gleichung

$$u_{jt} = \frac{d}{dx_j} a_j(x_j, u_{jx_j}) + f_j(x_j, t, u_j, u_{jx_j})$$

statt (4.1.b) möglich, falls $\frac{\partial}{\partial p} a_j$ und $\frac{\partial}{\partial x_j} a_j$ stetig sind und $\frac{\partial}{\partial p} a_j$, $\frac{\partial}{\partial x_j} a_j$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial p} a_j$ (2.5), (4.2.6) bzw. (4.5.3) erfüllen. (E) heißt hier

$$\frac{\partial}{\partial t} v_j^h = A_j^h v_{jx_j x_j}^h + B_j^h v_{jx_j}^h + C_j^h v_j^h + F_j^h,$$

wobei hier abweichend nur $A_j^h$ und $B_j^h$ mit $\xi = \big(x_j, \tau u_{jx_j}(x_j, t+h) + (1-\tau) u_{jx_j}(x_j, t)\big)$ und $\Xi$ wie folgt zu bilden sind:

$$A_j^h(x_j, t) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} a_j(\xi) d\tau$$

$$B_j(x_j, t) := \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} a_j(\xi) d\tau + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} f_j(\Xi) d\tau$$

Analog zeigt man (H) mit (2.7).

Auch wenn man sich $\kappa > 0$ als klein gegenüber den Kantenlängen vorzustellen hat, so ist die Voraussetzung (4.5.2) doch einschränkend und speziell. Immerhin werden durch sie z.B. alle Nichtlinearitäten $f_j$ der Gestalt

$$f_j(x_j, t, z, p) = g_j(x_j, t, z) + h_j(x_j, p) + \eta_j(z) |d_j(x_j, p)|$$

mit $\frac{\partial}{\partial z} \eta_j(z) \leqq 0$ und unter den natürlichen Voraussetzungen (4.2.5,6) und (4.5.3,4) an $g_j, h_j, d_j$ und $\eta_j$ erfaßt.
Will man (4.5.1,2) durch allgemeinere Bedingungen ersetzen, und trotzdem an $f_j$ nur eine Wachstumsbedingung (4.2.6) bzgl. $u_{jx_j}$ und nicht bzgl. der in $k_j \in E$ beteiligten Flüsse stellen, so muß man entweder $\max_j |u_{jx_j}|_{\Omega_j}^{(0)}$ abschätzen, oder Abschätzungen einer verallgemeinerten Lösung von (E) unabhängig von den Daten über Int E und analog zu LSU III Theorem (7.1),(10.1) nachweisen. Auf beiden Wegen kommt man im allgemeinen jedoch nicht um $L_{p,q}$-Abschätzungen von $(u_{jx_j})$ herum, vgl.(4.14).

Unter den Voraussetzungen (4.5) gilt wegen (4.6) eine $(1+\beta)$ - Abschätzung wie (4.3.1) mit der unter (4.2.7) erklärten Konstanten $M_4 = M_4(\mu_1, \mu_2, K_2, L_2, M_o, M_3, \Omega, |\Psi|^{(2)}_{\Omega})$, womit der entscheidende Schritt zur Anwendung des LERAY - SCHAUDER - Prinzipes getan ist, mit dessen Hilfe der folgende Existenzsatz bewiesen wird.

(4.7) Hauptsatz Sei $\alpha \in (0,1)$, und es seien die Voraussetzungen (4.2.1 - 6) und (4.5), oder (4.2.1 - 6) und die von Lemma (4.3) erfüllt. Außerdem gelte für $1 \leq j \leq N$ und $1 \leq i \leq n$:

(1) $a_j \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_j)$

(2) $f_j \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha}\left([0,l_j] \times [0,T] \times [-M_o, M_o] \times [-M_4, M_4]\right)$
wobei $M_4$ die oben bzw. unter (4.2.7) erklärte Konstante ist.

(3) $\Psi \in C_K^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$

(4) Kompatibilitätsbedingungen 1. Ordnung
1) Falls $\gamma_i = 1$ und $d_{ij} \neq 0$, so gilt

$$\Psi_t(E_i,0) = a_j(E_i,0)\Psi_{jx_jx_j}(E_i,0) + f_j\left(E_i,0,\Psi_j(E_i,0),\Psi_{jx_j}(E_i,0)\right).$$

2) Falls $k_j \cap k_s = \{E_i\}$, so gilt

$$a_j(E_i,0)\Psi_{jx_jx_j}(E_i,0) + f_j\left(E_i,0,\Psi_j(E_i,0),\Psi_{jx_j}(E_j,0)\right)$$
$$= a_s(E_i,0)\Psi_{jx_jx_j}(E_i,0) + f_s\left(E_i,0,\Psi_s(E_i,0),\Psi_{sx_s}(E_s,0)\right).$$

Dann existiert genau eine Lösung $u \in C_K^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ des DIRICHLETproblemes (4.1).

Die Voraussetzung (4.7.2) wird natürlich zum Teil von den zuvor genannten gedeckt. Zu (4.7.4) werde an die überall verwandte Konvention unter (1.4) erinnert: $u_j(E_i) := u_j(\pi_j^{-1}(E_i))$ usw.

Beweis Durch geeignete Fortsetzung, etwa mit $f_j(x_j,t,z,p) = f_j\left(x_j,t,\operatorname{signum}(z)\,M_o,\operatorname{signum}(p)\,M_4\right)$, für z und p außerhalb von $[-M_o,M_o]\times[-M_4,M_4]$, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß

$$f_j \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2},\alpha,\alpha}(\Omega_j \times \mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

mit denselben Hölderkonstanten ist.
Sei $\beta$ der Hölderexponent aus (4.3) und B der Banachraum (vgl.(1.10))

$$B = C_K^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Omega).$$

Zu $u\in B$ ist $f_j(\cdot,\cdot,u_j,u_{jx_j}) \in C^{\alpha\beta,\frac{\alpha\beta}{2}}(\Omega_j)$, nach Satz (3.3) existiert daher genau eine Lösung

$$(J)\quad v =: \Theta(u) \in C_K^{2+\alpha\beta,1+\frac{\alpha\beta}{2}}(\Omega)$$

der linearen Aufgabe

$$(L)\begin{cases} v \in C_K^{2,1}(\Omega), \\ v_{jt} = a_j v_{jx_jx_j} + f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j}) \\ \qquad - f_j\left(x_j,0,u_j(x_j,0),u_{jx_j}(x_j,0)\right) \\ \qquad + f_j\left(x_j,0,\Psi_j(x_j,0),\Psi_{jx_j}(x_j,0)\right) \text{ in } \Omega_{jp}, \\ v\big|_{\omega_p} = \Psi\big|_{\omega_p}, \end{cases}$$

wodurch ein nichtlinearer Operator $\Theta : B \longrightarrow B$ erklärt ist. Kandidat für die Lösung von (4.1) ist gerade ein Fixpunkt von $\Theta$, der mit Hilfe des folgenden Spezialfalles des LERAY - SCHAUDER - Prinzipes und des SCHAEFER'schen Fixpunktsatzes gefunden wird, vgl. SCHAEFER [2], LLOYD p.71, GILBARG - TRUDINGER Theorem (10.3).

(M) Satz Sei $\Theta$ stetige und kompakte Abbildung des Banachraumes B in sich, und sei die Menge

$$\mathcal{Z} := \{v\in B : \exists\, \lambda\in[0,1]:\ v = \lambda\Theta(v)\}$$

$\|\cdot\|_B$ - beschränkt. Dann besitzt $\Theta$ einen Fixpunkt in B.

Mit den Abkürzungen $\tilde{p} := \max\{|f_j^*(y;\lambda)| : 1 \le j \le N, y \in [0,l_j], \lambda \in [0,T]\}$ und

$$f_j^*(x_j;\lambda) := -f_j\left(x_j,0,\lambda\Psi_j(x_j,0),\lambda\Psi_{jx_j}(x_j,0)\right) + f_j\left(x_j,0,\Psi_j(x_j,0),\Psi_{jx_j}(x_j,0)\right),$$

erfüllen alle $f_j(x_j,t,z,p) + f_j^*(x_j;\lambda)$ die Voraussetzungen (4.2.3 - 9) bzw. (4.2.3 - 6) und (4.5.2 - 4) mit von $\lambda$ unabhängigen Konstanten, wobei nur zu $K_1, L_1$ und $L_2$ noch $\tilde{p} = \tilde{p}(K_2, L_2, |\Psi|_\Omega^{(2)})$ zu addieren ist. Die Menge $\mathcal{Z}$ ist dann nach Lemma (4.3) $|\cdot|_\Omega^{(1+\beta)}$ - beschränkt, weil für jedes $0 \neq u \in \mathcal{Z}$ mit $\lambda^{-1}u = \Theta(u)$ wegen (J), (L) und (4.3)

$$|u|_\Omega^{(1+\beta)} \le \lambda M \le M$$

mit einer von $\lambda$ unabhängigen Konstanten M gilt.

(N) Erklärt durch

$$\rho(u) := \left((x_j,t) \longmapsto f_j\left(x_j,t,u_j(x_j,t),u_{jx_j}(x_j,t)\right)\right)_{N\times 1},$$

genügt die Abbildung $\rho : B \longrightarrow \prod_{j=1}^{N} C^{\alpha\beta,\frac{\alpha\beta}{2}}(\Omega_j)$ einer Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{N} |\rho_j(u)|_\Omega^{(\alpha\beta)} \le H_1 |u|_\Omega^{(1+\beta)} + H_2$$

mit Konstanten $H_1$ und $H_2$, die nur von den Hölderkonstanten aller $f_j$, $K_2$ und $L_2$ abhängen.

Zum Nachweis von (N) rechnet man mit $M_j := \Omega_j \times \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}|\rho_j(u)|_\Omega^{(\alpha\beta)} &\le H^{\alpha}_{z,M_j}(f_j)\left(H^{\beta}_{x_j,\Omega_j}(u_j)\right)^{\alpha} + H^{\alpha}_{p,M_j}(f_j)\left(H^{\beta}_{x_j,\Omega_j}(u_{jx_j})\right)^{\alpha} \\ &\quad + H^{\alpha}_{z,M_j}(f_j)\left(H^{\beta/2}_{t,\Omega_j}(u_j)\right)^{\alpha} + H^{\alpha}_{p,M_j}(f_j)\left(H^{\beta/2}_{t,\Omega_j}(u_{jx_j})\right)^{\alpha} \\ &\quad + H^{\alpha\beta/2}_{t,M_j}(f_j) + H^{\alpha\beta}_{x_j,M_j}(f_j) + K_2|u_{jx_j}|_{\Omega_j}^{(0)} + L_2 \\ &\le \text{const.}\left(1 + |u|_\Omega^{(1+\beta)}\right) + \text{const.}\end{aligned}$$

Mit (J), (L), (N) und der $(2+\alpha\beta)$ - Abschätzung aus (3.3) folgt dann für $\Theta(u)$:

$$(O)\quad |\Theta(u)|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)} \leq K_o\Big(|\Psi|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)} + \sum_{j=1}^{N} |\rho_j(u)|_{\Omega_j}^{(\alpha\beta)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\Big(|\rho_j(u)|_{t=0}\,|_{[0,1_j]}^{(\alpha\beta)} + |\Psi_j|_{t=0}|_{[0,1_j]}^{(\alpha\beta)}\Big)\Big)$$

$$\leq M_{10}\big(1 + |u|_{\Omega}^{(1+\beta)}\big)$$

mit einer Konstanten $M_{10} = M_{10}(K_o, |\Psi|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)}, H_1, H_2)$. Daraus folgt sofort mit (1.11), daß $\Theta$ ein kompakter Operator ist.

Zum Nachweis der Stetigkeit von $\Theta$ betrachte man eine beliebige Folge $U := \{u_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subset B$, die in der Norm $|\cdot|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ gegen $u \in B$ konvergiert. Nach (J) und (O) ist die Menge

$$V := \{\Theta(u_\nu) : \nu \in \mathbb{N}\} \subset C_K^{2+\alpha\beta,\,1+\frac{\alpha\beta}{2}}(\Omega)$$

und $|\cdot|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)}$ - beschränkt, nach (1.11) also relativkompakt in $C^{2+\delta,\,1+\frac{\delta}{2}}(\Omega)$ für $0 \leq \delta < \alpha\beta$. V besitzt somit eine Teilfolge V*, die insbesondere in der Norm $|\cdot|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ konvergiert. Jede solche Teilfolge $V_1 := \{\Theta(v_\nu) : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ mit

$$|\cdot|_{\Omega}^{(1+\beta)}\text{-}\lim_{\nu\to\infty} \Theta(v_\nu) = v \in B$$

besitzt nach (O) eine in der Norm $|\cdot|_{\Omega}^{(2+\delta)}$ konvergente Teilfolge $V_2 := \{\Theta(v_{\nu_s}) : s \in \mathbb{N}\} \subseteq V_1$, deren $|\cdot|_{\Omega}^{(2+\delta)}$ - Limes aber nur v sein kann, so daß v auch in $C_K^{2+\delta,\,1+\frac{\delta}{2}}(\Omega)$ liegt. Wegen der Stetigkeitsforderung (4.2.5) an $f_j$ gilt aber für die Teilfolge $\{v_{\nu_s} : s \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ und für alle $(x_j, t) \in \Omega_j$

$$\lim_{s\to\infty} \rho_j(v_{\nu_s})(x_j, t) = \rho_j(u)(x_j, t).$$

Daher löst v die Aufgabe (L), die mit u gebildet wird, da jedes $v_\nu$ auf $\omega_p$ mit $\Psi$ übereinstimmt. Nach dem Eindeutigkeitssatz (2.4) ist dann $v = \Theta(u)$.
V besitzt also genau einen Häufungspunkt in B, nämlich $\Theta(u)$, was den Stetigkeitsnachweis von $\Theta$ beschließt.

Nun ist (M) auf $\Theta: B \to B$ anwendbar, und es gibt eine Lösung u von (4.1) als Fixpunkt von $\Theta$, für die nach (J)

$$u \in C_K^{2+\alpha\beta,\,1+\frac{\alpha\beta}{2}}(\Omega)$$

gilt. Daraus folgt insbesondere für $1 \leq j \leq N$ (vgl.(1.9))

$$u_{jx_j} \in C^{1,\frac{1}{2}}(\Omega_j) \text{ und } f_j(\cdot,\cdot,u_j,u_{jx_j}) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_j).$$

Nochmalige Anwendung von (3.3) zeigt schließlich

$$u \in C_K^{2+\alpha,\,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega).$$

Die Eindeutigkeitsaussage in (4.7) wird mit (2.4) gezeigt. Nach (4.2.8,9) bzw.(4.5.2,4) gilt in $\Omega_j \times [-M_o,M_o] \times [-M_4,M_4]$

$$\frac{\partial}{\partial z} f_j(x_j,t,z,p) \leq K_4$$

für $1 \leq j \leq N$. (Streng genommen sind die Geltungsbereiche im zweiten Falle unterschiedlich, weil $M_1(\kappa) \leq M_4$, doch kann o.B.d.A in (4.5.4) $M_4$ statt $M_1(\kappa)$ gesetzt werden.) Aus

$$f_j(x,t,w,p) - f_j(x,t,u,p) = (w-u)\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} f_j(x,t,\zeta w+(1-\zeta)u,p)\,d\zeta$$

erhält man die einseitige Lipschitzbedingung (2.4.1) mit $L = K_4$, nach (2.4) ist daher u einzige Lösung von (4.1).

Q.e.d.

Im folgenden werde die Lösbarkeit von (4.1) untersucht, wenn man statt (4.5.2,1) nahe den Verzweigungsknoten Wachstumsbedingungen der Nichtlinearitäten in Abhängigkeit von $\sum_j d_{ij} c_{ij} u_{jx_j}$ und dort ebenfalls Übereinstimmung der Diffusionsraten fordert.

(4.8) Voraussetzungen $\exists \kappa \in (0, \frac{1}{2} \min\{l_1,..,l_N\})$:

(1) $\forall i \in \{1,..,n\}\ \forall j,k \in \{1,..,N\}\ \forall (y,t) \in [0,\kappa] \times [0,T]$:

$$d_{ij}d_{ik} \neq 0 \Longrightarrow a_j\left(\frac{l_j}{2}(1+d_{ij}) - y d_{ij},t\right) = a_k\left(\frac{l_k}{2}(1+d_{ik}) - y d_{ik},t\right)$$

(2) $\exists K_5, L_5 \geq 0 \quad \forall i \in \{1,..,n\} \quad \forall (y,t) \in [0,\kappa] \times [0,T]$

$$\forall z=(z_j) \in [-M_o, M_o]^N \; \forall p=(p_j) \in [-M_1(y), M_1(y)]^N:$$

$$\left| \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 c_{ij} f_j \left( \frac{l_j}{2}(1+d_{ij}) - y d_{ij}, t, z_j, p_j \right) \right| \leq L_5 + K_5 \left| \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 c_{ij} p_j \right|^2$$

(3) Jedes $f_j$ erfüllt in $\Omega_j \times [-M_o, M_o] \times \mathbb{R}$ eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. t.

(4) (4.5.3 und 4) mit den Bezeichnungen von (4.4), ferner sind $a_j$ und $a_{jx_j}$ lipschitzstetig in t.

(4.9) Satz Unter den Voraussetzungen (4.2.1 - 6) und (4.8) gilt:

(1) Für eine Lösung u von (4.1) ist $|u_t|_{\Omega}^{(0)}$ abschätzbar durch eine Konstante $M_{11}$, die nur abhängt von

$$\mu_1, \mu_2, \kappa, \Omega, M_o, M_1(\kappa/4), M_2, K_2, K_4, K_5 \text{ und } L_5.$$

(2) Gelten außerdem die Voraussetzungen (4.7.1 - 4), so existiert genau eine Lösung u der Aufgabe (4.1) in $C_K^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$.

Beweis Die Aussage (2) folgt aus (1) und mit Lemma (4.3) durch zu (4.7) analoge Beweisführung. Zum Nachweis von (1) läßt sich der Beweis zu (4.6) bis zur Abschätzung (4.6.C) von $|u_t|$ in $[\kappa/2, l_j - \kappa/2] \times [0,T]$ einschließlich übertragen, und $M_8$ werde hier genauso wie in (B) erklärt. Zu zeigen bleibt, daß $|u_t|$ in einer $\kappa$-Umgebung eines jeden Verzweigungsknotens abschätzbar ist. Wie oben sei dazu o.B.d.A. $\Gamma$ ein Stern mit Verzweigungsknoten $E_i$ und $\gamma_i$ Kanten der Länge $\kappa$, für die alle o.B.d.A. $d_{ij} = -1$ gelte.

$w: \Sigma \to \mathbb{R}$ werde erklärt durch

$$(P) \quad \Sigma := [-\kappa, \kappa] \times [0,T], \; c^* := \sum_{j=1}^{\gamma_i} c_{ij},$$

$$v(y,t) := \frac{1}{c^*\gamma_i} \sum_{j=1}^{\gamma_i} c_{ij}\, u_j(y,t) \quad \text{für } y \in [0,\kappa], \text{und}$$

$$w(y,t) := \begin{cases} v(-y,t), & \text{falls } y \in [-\kappa,0] \\ v(y,t), & \text{falls } y \in [0,\kappa] \end{cases}$$

Da u bei $E_i$ wohldefiniert ist und die KIRCHHOFFbedingung (K) erfüllt, ist w bei y=0 wohldefiniert und stetig bzw. stetig differenzierbar mit

$$w(0,t) = u(E_i,t),\ w_y(0,t) = 0,$$

und da w durch gerade Fortsetzung von v auf $[-\kappa,0]$ entsteht, gilt

$$w \in C^{2,1}(\Sigma) \text{ und}$$

$$(Q) \quad w_t(0,t) = u_t(E_i,t) \text{ für alle } t \in [0,T].$$

Mit $a^* := a_j$ für beliebiges $d_{ij}=-1$ und

$$f^*(y,t,p) :=$$

$$(L_5 + K_5 p^2)\, \frac{\frac{1}{c^*\gamma_i} \sum_{j=1}^{\gamma_i} c_{ij} f_j\left(y,t,u_j(y,t), \operatorname{signum}(y)\, u_{jx_j}(y,t)\right)}{L_5 + K_5 \left| \sum_{j=1}^{\gamma_i} c_{ij}\, u_{jx_j}(y,t) \right|^2}$$

erfüllt wegen (4.8.1) w in $\Sigma$ die Gleichung

$$(R) \quad w_t = a^* w_{yy} + f^*(y,t,w_y).$$

$a^*$ und $f^*$ erfüllen alle Voraussetzungen des Satzes LSU V Theorem (4.2) über die Abschätzung der ersten räumlichen Ableitung einer Lösung von LSU V (0.1). $f^*$ ist nämlich stetig in $p=w_y$ wegen (4.2.5), $a^*_y$ ist beschränkt wegen (4.2.2), und $f^*$ wächst höchstens quadratisch in p nach (4.8.2). Damit gelten LSU V (3.1 - 6) und die Forderung LSU S.418[19], nach dem oben zitierten Satz existiert daher eine Konstante

$$M_{12} = M_{12}(\mu_1,\mu_2,\Omega,M_o,\kappa/2,L_2,K_2,L_5,K_5, \max_{1\le j\le\gamma_i} |\psi_{jx_j}|_{t=0}|^{(0)}_{[0,l_j]}),$$

so daß

$$(S) \quad |w_y|^{(0)}_{\Sigma} \leq M_{12}.$$

Da bereits $|u_{jt}|$ über $[\kappa/2, l_j - \kappa/2]$ durch $M_8$ abgeschätzt wurde (in (B) ist natürlich $K_3$ durch $K_4$ zu ersetzen), ist insgesamt auch $|w_t|$ für $\kappa/2 \leq |y| \leq \kappa$ abschätzbar, womit jetzt mit (4.8.3,4) und (S) der Satz LSU V Theorem (5.1) auf w und $\Sigma$ anwendbar ist. Mit einer Konstanten

$$M_{11} = M_{11}(\mu_1, \mu_2, K_4, M_8, M_{12}, M_o, C)$$

ist

$$|w_t|^{(0)}_{\Sigma} \leq M_{11}$$

und wegen (Q) gerade

$$\max\{|u_t(E_i,t)| : t \in [0,T]\} \leq M_{11}. \qquad \text{Q.e.d.}$$

Man beachte, daß zur Anwendung von LSU V Thmm.(4.2),(5.1) $f^*$ in y (und t) nicht stetig zu sein braucht.
Die Voraussetzung (4.8.2) ist sehr einschränkend und im allgemeinen schwer nachzuprüfen. Ihr gehorchend wird $f_j$ über Int E im wesentlichen von der Form $f_j(E_i,t,z_j,p_j) = d_{ij} \times g_j(E_i,t,z_j,p_j) + d_{ij}p_j$ mit global beschränktem $g_j$ sein. Der Beweis zu (4.9) legt jedoch offen, wie man auf (4.8.2) verzichten kann. Zur Anwendung von LSU V Theorems (3.1),(4.2) auf w und (R) benötigt man nämlich für

$$(T) \quad \xi_{ij}(y) := l_j \frac{1+d_{ij}}{2} - y\, d_{ij}, \quad c_i^* := \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, c_{ij},$$

$$f_i^*(y,t) := \frac{1}{\gamma_i c_i^*} \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 c_{ij} f_j\big(\xi_{ij}(|y|), t,$$

$$u_j(\xi_{ij}(|y|),t), \operatorname{signum}(y)\, d_{ij}\, u_{jx_j}(\xi_{ij}(|y|),t)\big)$$

gerade das Folgende:

(4.10) Sei $q \in [1,\infty]$, $\sigma \in (0,1/2)$ und $r \in [(1-\sigma)^{-1}, (1/2-\sigma)^{-1}]$, so daß $\frac{1}{r} + \frac{1}{2q} + \sigma = 1$. Kann man dann zu jedem Verzweigungsknoten $E_i$ die Norm

$$\|f_i^*\|_{2q,2r,\Sigma} := \left( \int_0^T \left( \int_{-\kappa}^{\kappa} |f_i^*(y,t)|^{2q}\, dy \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{2r}}$$

a priori abzuschätzen, so kann in dem Satz (4.9) auf die Voraussetzung (4.8.2) verzichtet werden. $M_{11}$ hängt dann auch von r und q ab.

Dies werde in einem Spezialfall vorgeführt.

(4.11) Satz Es gelten die Voraussetzungen (4.2.1 - 6), (4.5.1), (4.8.1,3,4), und außerdem zu $\kappa>0$ wie oben

(1) $\forall j \in \{1,\dots,N\}\ \forall x_j \in [0,\kappa] \cup [l_j-\kappa, l_j]$

$\forall (t,z,p) \in [0,T]\times[-M_o,M_o]\times\mathbb{R}$:

$$|f_j(x_j,t,z,p)| \leq L_2 + K_2|p|^{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist $|u_t|$ über allen Verzweigungsknoten abschätzbar durch eine Konstante $M_{13}$, die nur von $\mu_1, \mu_2, \kappa, T, G, M_1(\kappa), M_o, L_2, K_2, K_4, M_1(\kappa/4)$ und $M_2$ abhängt.
Gilt außerdem (4.7.1 - 4), so existiert genau eine Lösung $u \in C_K^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ von (4.1).

Beweis Es bleibt für w wie unter (P), eine a priori - Abschätzung von $|w_y|_\Sigma^{(0)}$ zu finden, wozu es genügt für $f_i^*$ aus

$$w_t = \frac{d}{dy}(a^* w_y) - a_y^* w_y + f_i^*$$

(4.10) zu zeigen. Sei $q = r = 2$ und $\sigma = 1/4$, ferner $E_i \in \operatorname{Int} E$. Mit (1) wird dann in $\Sigma$ abgeschätzt wie folgt.

$$\|f_i^*\|_{4,4,\Sigma} \leq \frac{1}{\gamma_i} \left( \int_0^T 2 \int_0^{\kappa} \left( \sum_{j=1}^{N} \frac{c_{ij}}{c_i^*} d_{ij}^2 (L_2 + K_2 |u_{jx_j}(y,t)|^{\frac{1}{2}}) \right)^4 dy\, dt \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq (2T\kappa)^{\frac{1}{4}} \frac{L_2}{\gamma_i c_i^*} \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 c_{ij}$$

$$+ \frac{2^{\frac{1}{4}} K_2}{\gamma_i} \left( \int_0^T \int_0^{\kappa} \left( \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 \left( \frac{c_{ij}}{c_i^*} \right)^{\frac{1}{4}} |u_{jx_j}(y,t)|^{\frac{1}{2}} \right)^4 dy\, dt \right)^{\frac{1}{4}}$$

In der rechten Seite der letzten Abschätzung wird der Ausdruck (=:$S_1$), in dem $u_{jx_j}$ vorkommt, abgeschätzt zu

$$S_1 \leq \frac{2^{\frac{1}{4}} K_2}{\gamma_i} \left(\frac{2^{3(\gamma_i-1)}}{c_i^*}\right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^T \int_0^K \sum_{j=1}^N d_{ij}^2 c_{ij} \, |u_{jx_j}(y,t)|^2 \, dy \, dt \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Hilfe von (4.12). Q.e.d.

(4.12) Sei u Lösung von (4.1) unter den Voraussetzungen (4.2.1 - 6) und (4.5.1).
Dann ist zu $\kappa \geq \varepsilon > 0$ und für jede Ecke $E_i$

$$\sum_{j=1}^N d_{ij}^2 c_{ij} \int_0^T \int_0^\varepsilon u_{jx_j}^2 \left(1_j \frac{1+d_{ij}}{2} - x_j d_{ij}, t\right) dx_j \, dt \leq M_{14}$$

mit einer Konstanten $M_{14} = M_{14}(\varepsilon; \Omega, M_1(\varepsilon), M_o, \mu_1, L_2, K_2)$, die auch von $|\Psi_t|_\Omega^{(0)}$ im Falle $E_I \in \partial G$ abhängt.

Beweis Für eine Randecke $E_i$ folgt die Behauptung mit LSU V Theorem (4.2) und LSU VI Lemma (3.1). Sei $E_i$ ein fest gewählter Verzweigungsknoten, zu dem o.B.d.A. $d_{ij} = -1$ für alle $k_j \ni E_i$ angenommen werde, andernfalls ersetze man im Folgenden $u_j(x_j,t)$ durch $u_j(\xi_{ij}(x_j),t)$ und $u_{jx_j}(x_j,t)$ durch $-d_{ij} u_{jx_j}(\xi_{ij}(x_j),t)$. Zur Abkürzung sei noch gesetzt

$$c_{ij}^\circ := d_{ij}^2 c_{ij}.$$

Mit

$$A_1 := \sum_{j=1}^N c_{ij}^\circ \int_0^T \int_0^\varepsilon \frac{1}{a_j(x_j)} u_{jt}(x_j,t) \left(e^{\lambda u_j(x_j,t)} - 1\right) dx_j \, dt$$

$$A_2 := \sum_{j=1}^N c_{ij}^\circ \int_0^T \int_0^\varepsilon u_{jx_jx_j}(x_j,t) \left(e^{\lambda u_j(x_j,t)} - 1\right) dx_j \, dt$$

$$A_3 := \sum_{j=1}^N c_{ij}^\circ \int_0^T \int_0^\varepsilon \frac{f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})}{a_j(x_j)} \left(e^{\lambda u_j(x_j,t)} - 1\right) dx_j \, dt$$

folgt aus den Differentialgleichungen (4.1.b)

$$A_1 = A_2 + A_3.$$

Außerdem berechnet man zu $A_2$ wegen $u \in C_K^{2,1}(\Omega)$ und zu $A_3$ wegen (4.2.6) und (2.5):

$$A_2 = -\lambda \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} u_{jx_j}^2(x_j,t)\, e^{\lambda u_j(x_j,t)}\, dx_j\, dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T u_{jx_j}(\varepsilon,t)\left(e^{\lambda u_j(\varepsilon,t)} - 1\right) dt \qquad (:= A_{22})$$

$$\left(\text{es ist } \left(\sum_{j=1}^{N} (-1)\, c_{ij}^{\circ}\, u_{jx_j}(0,t)\right) e^{\lambda u(0,t)} = 0\right)$$

$$A_3 \le \frac{1}{\mu_1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} \left(L_2 + K_2 u_{jx_j}^2(x_j,t)\right)\left(e^{\lambda u_j(x_j,t)} - 1\right) dx_j\, dt$$

$$= \frac{K_2}{\mu_1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} u_{jx_j}^2(x_j,t)\, e^{\lambda u_j(x_j,t)}\, dx_j\, dt$$

$$+ \frac{L_2}{\mu_1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} e^{\lambda u_j(x_j,t)} - 1\, dx_j\, dt \qquad (:= A_{32})$$

$$- \frac{K_2}{\mu_1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} u_{jx_j}^2(x_j,t)\, dx_j\, dt$$

Wählt man $\lambda := K_2/\mu_1$, so folgt die gewünschte Abschätzung

$$\frac{K_2}{\mu_1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} u_{jx_j}^2(x_j,t)\, dx_j\, dt$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{\circ} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{a_j(x_j)} \left(u_j(x_j,\tau) - e^{\frac{K_2}{\mu_1} u_j(x_j,\tau)}\right)\Big|_0^T dx_j$$

$$+ A_{22} + A_{32}$$

da die rechte Seite der letzten Abschätzung nur noch von bereits abgeschätzten Größen abhängt. Q.e.d.

Will man in (4.11) ohne die Bedingung (4.11.1) auskommen, so muß man, dem Beweis folgend,

$$\sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 c_{ij} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} u_{jx_j}^8 (\xi_{ij}(x_j),t)\, dx_j dt$$

a priori abschätzen, was meistens möglich, jedoch sehr aufwendig ist und hier nicht dargelegt werden soll, da man im wesentlichen die Herleitungen der Formeln V (3.18) und V (4.10) bei LSU zu übertragen hat, vgl. (4.14).

(4.13) Bemerkung Unter schwächeren Bedingungen kann man ähnlich zum obigen Vorgehen auch $|u_{jx_j}|$ über Int E abschätzen: Ist u eine Lösung von (4.1), gelten (4.2.1 - 6) und (4.8.1) und ist eine der Voraussetzungen (4.8.2), (4.10) oder $\{(4.5.1)\ \&\ (4.11.1)\}$ erfüllt, so ist

$$\max_{1\le j\le N} \{|d_{ij}\, u_{jx_j}(x_j,t)| : (x_j,t) \in [l_j \tfrac{1+d_{ij}}{2}, l_j \tfrac{1+d_{ij}}{2} - x_j d_{ij}] \times [0,T]\}$$

zu jeder Ecke $E_i \in \text{Int } E$ durch eine Konstante $M_{12}^*$ abschätzbar, die nur von $\mu_1, \Omega, \kappa, M_o, L_2, K_2, L_5, K_5$ und $\max_{1\le j\le N} |\psi_{jx_j}|_{t=0}|_{[0,l_j]}^{(0)}$ und q und r aus (4.10) abhängt.

Beweis Wieder kann man sich auf den Fall (D) beschränken, zu $k_s$ mit $d_{is}=-1$ und $1\le s\le \gamma_i$ setzt man dann:

$$c_s^* := \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne s}}^{\gamma_i} c_{ij}, \quad v_s^1(y,t) := c_s^* u_s\left(\frac{-c_{is}}{c_s^*} y, t\right),$$

$$\kappa_s := \kappa c_s^* (c_{is})^{-1}, \quad v_s^2(y,t) := \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne s}}^{\gamma_i} c_{ij}\, u_j(y,t)$$

und $v_s : [-\kappa_s, \kappa] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ mit

$$v_s(y,t) := \begin{cases} v_s^1(y,t), & \text{falls } y \in [-\kappa_s, 0) \\ v_s^2(y,t), & \text{falls } y \in [0,\kappa] \end{cases}$$

Da u bei $E_i$ wohldefiniert ist und die KIRCHHOFFbedingung (K) erfüllt, ist $v_s$ bei $y = 0$ stetig bzw. stetig differenzierbar, mit $\Sigma_s := [-\kappa_s, \kappa] \times [0,T]$ ist daher

$$v_s \in C^{1,1}(\Sigma_s)$$

und besitzt in $\Sigma_s$ beschränkte Ableitungen $v_{syy}$. (Im allgemeinen wird $v_{syy}$ bei y=0 nicht stetig sein.) Außerdem genügt $v_s$ mit

$$a_s^*(y,t) := \begin{cases} \dfrac{c_s^*}{c_{is}^2}\, a_s\left(\dfrac{-c_{is}}{c_s^*}y, t\right), & \text{falls } y \in [-\kappa_s, 0) \\ a_s(y,t), & \text{falls } y \in [0,\kappa], \end{cases}$$

$$f_s^{2*}(y,t) := \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{\gamma_i} c_{ij}\, f_j(y,t,u_j(y,t), u_{jx_j}(y,t))$$

und

$$f^*(y,t,p) := \begin{cases} f_s\left(\dfrac{-c_{is}}{c_s^*}y, t, u_s\left(\dfrac{-c_{is}}{c_s^*}y, t\right), \dfrac{-p}{c_{is}}\right), & \text{falls } y \in [-\kappa_s, 0) \\ f_s^{2*}(y,t), & \text{falls } y \in [0,\kappa] \text{ und (4.10 oder 11.1) gilt} \\ \left(L_5 + K_5 p^2\right) \dfrac{f_s^{2*}(y,t)}{L_5 + K_5 \left| \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{\gamma_i} c_{ij}\, u_{jx_j}(y,t) \right|^2}, & \text{falls } y \in [0,\kappa] \text{ und (4.8.2) gilt} \end{cases}$$

in $\Sigma_s$ der Differentialgleichung

$$(U) \quad v_{st} = a_s^*(y,t)\, v_{syy} + f_s^*(y,t,v_{sy}).$$

Wiederum erfüllen $a_s^*$ und $f_s^*$ die Bedingungen LSU V (3.1-6) und S.418[19], es kann daher LSU V Theorem (3.1) auf $v_s$ und (U) angewandt werden, wozu bemerkt werde, daß dazu weder $f_s^*$ stetig in y zu sein braucht, noch $v_s$ in $C^{2,1}(\Sigma_s)$ liegen muß, es genügt, daß $v_s$ in $C^{1,0}(\Sigma_s)$ liegt und in $\Sigma_s$ beschränkte Ableitungen $v_{st}$ und $v_{syy}$ besitzt. Also gibt es eine Konstante

$$M_{12}(s) = M_{12}(s;\mu_1,\Omega,M_o,\kappa/2,L_2,K_2,L_5,K_5, \max_{\substack{1\le j\le N \\ \xi\in[0,l_j]}} |\psi_{jx_j}(\xi,0)|),$$

so daß in $[-\kappa_s/2,\kappa/2]\times[0,T]$ als Teilgebiet von $\Sigma_s$

$$(V)\quad \max\{|v_{sy}(y,t)| : (y,t)\in[-\kappa_s/2,\kappa/2]\times[0,T]\} \le M_{12}(s).$$

Mit (V) wird aber auch $u_{sx_s}(x_s,t) = -c_{is}^{-1} v_{sy}^1(-c_{is}^{-1}c_s^* x_s,t)$ in $[0,\kappa/2]\times[0,T]$ abgeschätzt:

$$\max\{|u_{sx_s}(x_s,t)| : (x_s,t)\in[0,\tfrac{\kappa}{2}]\times[0,T]\} \le \frac{1}{c_{is}} M_{12}(s).$$

Nun hat man nur noch $M_{12}^*$ als Maximum aller $\max_{1\le s\le\gamma_i} c_{is}^{-1} M_{12}(s)$ zu wählen. Q.e.d.

Entsprechend lassen sich auch für $|u_{jx_j}|^{(\delta)}$ obere Schranken mit passendem $\delta\in(0,1)$ in der Nähe von Verzweigungsknoten finden. Über Randecken wird $|u_{jx_j}|$ in Abhängigkeit von $|\psi_t|_\Omega^{(0)}$ nach LSU VI Lemma (3.1) abgeschätzt.
Die Voraussetzung (4.8.1) erhellt den Systemcharakter der Aufgabe (4.1), da sie für Systeme eine typische Vereinfachung bildet, vgl. etwa LSU VII (5.1).

(4.14) Anmerkungen zu allgemeineren Aufgaben

Seien statt (4.1.b) auf jeder Kante $k_j$ von G semilineare Gleichungen in Divergenzform

$$(1)\quad u_{jt} = \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j}) + f_j(x_j,t,u_j,u_{jx_j})$$

vorgegeben, wobei $a_j$ und $f_j$ lokal lipschitzstetig in t sind, $\frac{\partial}{\partial x_j}a_j$, $\frac{\partial}{\partial u}a_j$, $\frac{\partial}{\partial p}a_j$, $\frac{\partial}{\partial u}f_j$ und $\frac{\partial}{\partial p}f_j$ existieren und lokal beschränkt sind, sowie $\frac{\partial}{\partial p}a_j$ und $(\frac{\partial}{\partial u}a_j + a_j)(1+|p|) + \frac{\partial}{\partial x_j}a_j + f_j$ die Voraussetzungen (4.2.1 - 6) erfüllen. Auch hier genügt es zum Nachweis einer Lösung u der Aufgabe (4.1.a,c) & (4.14.1), zu einer solchen $|u_t|$ über Int E durch eine Konstante M* a priori abzuschätzen, woraus dann mit zu (4.3) gleicher Beweisführung die entscheidende (1+β) - Abschätzung folgt. Im allgemeinen wird es jedoch nicht möglich sein, wie in den Fällen (4.5, 6.2, 9 oder 11) M* ohne Abschätzungen von $u_{jx_j}$ nahe Int E zu finden, vielmehr müssen zunächst unab-

hängig von $u_t|_{\text{Int } E\times[0,T]}$ mit geeigneten q,r die Normen

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{(2)}_{q,r,\Omega_j}$$

a priori abgeschätzt werden, was mit Hilfe des Satzes SOLONNIKOV §21 Theorem (5.4) oder LSU VII Theorem (10.4) im wesentlichen auf das Problem reduziert werden kann,

$$(2)\quad \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, c_{ij} \int_0^T \int_0^{\varepsilon} \left(u_{jx_j}(\xi_{ij}(x_j),t)\right)^{2s} dx_j dt \le \text{const.}$$

für genügend große $s \ge 1$ zu beweisen.

In den meisten Fällen können dazu die Techniken LSU III §11, V §§ 3-4, VI § 3 übertragen werden, wobei als Schnittfunktionen $\zeta \in C_K^{2,1}(\Omega)$ mit entsprechend zu wählenden Wertebereichen dienen, die Dichtheit von $C_K^{1,0}(\Omega)$ in $C(\Omega)$ verwendet wird und zu Transformationen die folgende Regel Anwendung findet

$$v \in C_K^{1,0}(\Omega),\ \phi \in C^{1,0}(\mathbb{R}\times[0,T]) \Longrightarrow \phi(v(\cdot,\cdot),\cdot) \in C_K^{1,0}(\Omega).$$

Im Falle (4.8.1) findet man mit (2) direkt die gewünschte Abschätzung von $|u_t|$, vgl.(Q). In den übrigen Fällen, etwa ohne (4.5.2) vorauszusetzen, kann man zwei Wege einschlagen:

(3) Für den zeitlichen Differenzenquotienten $v^h$ stellt man die (E) entsprechende Gleichung (E') auf, deren Koeffizienten wegen (2) $\|\cdot\|_{q,r,\Omega_j}$-beschränkt sind mit q und r wie in (4.10). Läßt man zum Beispiel $a_j$ nahe Int E auch von t in (4.5) abhängen, so tritt zu $F_j^h$ gerade der Summand

$$\tfrac{1}{h}(a_j(x_j,t+h) - a_j(x_j,t))\, u_{jx_jx_j}(x_j,t)$$

hinzu, der mit den Überlegungen zu (2) abgeschätzt wird. Dann hat man entsprechend zu LSU III Theorem (7.1) zu zeigen, daß sich eine Lösung $v \in C_K^{2,1}(\Omega)$ von (E') bzgl. $|\cdot|_\Omega^{(0)}$ in Abhängigkeit von $M_o, q, r, |\Psi|_\Omega^{(2)}$ und den aus (2) abgeleiteten Konstanten abschätzen läßt, wozu zweckmäßigerweise (4.1) als ARWA eines Systemes wie im 3. Abschnitt aufgefaßt wird.

(4) Unter den (4.7.1 - 4) entsprechenden Voraussetzungen zur Gleichung (1) schneidet man die Nichtlinearitäten etwa durch

$$f_j^{(k)} := f_j\left(x_j,t,z,\text{signum}(p)\min\{|p|,k\}\right)$$

und ebenso $\frac{\partial}{\partial x_j} a_j$ und $\frac{\partial}{\partial u} a_j$ ab und ersetzt in (1) $a_j$ und $f_j$ durch $a_j^{(k)}$ und $f_j^{(k)}$ zu $(1^{(k)})$. Für $k \geq \max_{1 \leq j \leq N} |\psi_{jx_j}|^{(0)}_{\Omega_j}$ sind dann die Kompatibilitätsbedingungen (4.7.4) erfüllt, und die entsprechend (4.7) gewonnenen Lösungen

$$\{u^{(k)} : u^{(k)}\big|_{\omega_p} = \psi\big|_{\omega_p}, u^{(k)} \text{ erfüllt } (1^{(k)}), k \in \mathbb{N}\} \subset C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$$

besitzen als nach (2) beschränkte Menge des reflexiven Banachraumes

$$W := \prod_{j=1}^{N} W_2^{2,1}([0,1_j])$$

eine schwach konvergente Teilfolge, dessen Limes $u \in W$ Kandidat für eine verallgemeinerte Lösung von (1) & (4.1.c,(K)) ist. Dabei bezeichnet $W_2^{2,1}$ den durch die Indices bestimmten Sobolevraum, vgl. LSU I (1.13,14). Von u hat man dann Regularitätseigenschaften nachzuweisen, wobei man den Sätzen LSU V §2, §1 und §3 folgen muß, und den letztgenannten noch analog LADYŽENSKAJA, URAL'CEVA Chap.IV §§3-4 zu übertragen hat.

Die Vorgehensweisen (3) und (4) ermöglichen unter natürlichen Voraussetzungen den Nachweis einer Lösung u, beide Wege sind jedoch langwierig und aufwendig und werden deshalb hier nicht dargelegt, zumal man letztlich unter einer Randbedingung der Form (3.8.4) die Einbettbarkeit einer geeigneten Wachstumsklasse $\mathfrak{B}_2^N([0,1]\times[0,T], M_o, \ldots, r, q, \ldots)$ in $C_K^{\beta, \beta/2}([0,1]\times[0,T])$ zu zeigen hat, vgl. LSU II§§7,9; VII §§2,3.

(4.15) Konstantenübersicht für die Abschnitte 3 und 4

Genannt wird jeweils der Ort der Einführung oder Definition.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C$ | (1.4) | $r,q$ | (4.10) |
| $\mu_1$ | (3.1) | $M_{13}$ | (4.11) |
| $\rho_{i1}$ | (3.2.d3) | $M_{14}$ | (4.12) |
| $K_o$ | (3.3) | $M^*_{12}$ | (4.13) |
| $\mu_2,\mu_1$ | (4.2) aus (2.5) | $M^*_{12}(s)$ | S.75 |
| $K_1,L_1$ | (4.2.3) | | |
| $M_o$ | (4.2.4) | | |
| $K_2,L_2$ | (4.2.6) | | |
| $M_4$ | (4.2.7) und S.62 | | |
| $K_4$ | (4.2.9) | | |
| $M^*$ | (4.3) | | |
| $M$ | (4.3) | | |
| $M_5,M_6,M_7$ | S.56 | | |
| $M_2$ | S.57 | | |
| $M_1(d)$ | (4.4) | | |
| $\kappa$ | (4.5) und (4.8) | | |
| $K_3$ | (4.5.2 und 4) | | |
| $M_3$ | (4.6) | | |
| $M_8$ | (B) S.58 | | |
| $M_9$ | (H) S.60 | | |
| $H_1,H_2$ | (N) S.64 | | |
| $M_{10}$ | (O) S.65 | | |
| $K_5,L_5$ | (4.8.2) | | |
| $M_{11}$ | (4.9) | | |
| $M_{12}$ | S.68 | | |

## 5. STURM - LIOUVILLE - Eigenwertaufgaben auf $C^2$ - Netzwerken

In diesem und in den folgenden Abschnitten sei G ein $C^2$ - Netzwerk mit zugehörigem topologischen Graphen $\Gamma$ wie in (1.3) und (1.4). Zu jeder Kante $k_j$, $1 \leq j \leq N$, sei ein linearer Operator $\mathcal{L}_j$ in selbstadjungierter Form vorgegeben

$$(5.1)\quad (\mathcal{L}_j u_j)(x_j) := \frac{1}{r_j(x_j)} \frac{d}{dx_j} \left(a_j(x_j)\, u_{jx_j}(x_j)\right) - q_j(x_j)\, u_j(x_j)$$

mit

$$a_j \in C^1([0,l_j]) \text{ und } a_j \geq \mu_1 > 0 \text{ in } [0,l_j],$$

$$r_j \in C([0,l_j]) \text{ und } r_j > 0 \text{ in } [0,l_j],$$

$$q_j \in C([0,l_j])$$

und einer vorgegebenen Zahl $\mu_1 > 0$.

In Verbindung mit $\mathcal{L}_j$ werden zu den Flüssen $a_j u_{jx_j}$ statt der Bedingung (1.5.K) in den Verzweigungsknoten die folgenden unterschieden, wozu an die Abkürzungen aus (1.4) erinnert sei.

(5.2) konsistente KIRCHHOFFbedingung $\forall i \in \{1,..,n\}$:

$$(K^*)\quad \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, a_j(E_i)\, u_{jx_j}(E_i) = 0, \text{ falls } \gamma_i \geq 2.$$

(5.3) KIRCHHOFFbedingung mit Ventilmatrix C $\forall i \in \{1,..,n\}$:

$$(K_C^*)\quad \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, c_{ij}\, a_j(E_i)\, u_{jx_j}(E_i) = 0, \text{ falls } \gamma_j \geq 2.$$

Das zu (5.1) gehörende REWP (5.4) wird in die SCHÄFKE - SCHNEIDER - Theorie eingeordnet und zunächst als S - hermitesches Rand - Eigenwertproblem im Normalfall nachgewiesen, vgl. SCH [2] §1.

(5.4) (a) $u \in C^2(G)$

(b) $\forall j \in \{1,...,N\}$: $\mathcal{L}_j u_j = -\lambda u_j$

(c) u erfüllt (5.2)

(d) STURM'sche Randbedingungen bei $\partial G$

$\forall i \in \{s: 1 \le s \le n, E_s \in \partial G\} \exists \rho_{i1}, \rho_{i2} \in \mathbb{R}$:

$\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 > 0$ und für $d_{ij} \neq 0$

$$\rho_{i1} u_j(E_i) + \rho_{i2} d_{ij} a_j(E_i) u_{jx_j}(E_i) = 0$$

oder

($d_\lambda$) $\lambda$ - abhängige Randbedingungen bei $\partial G$

$\forall i \in \{s: 1 \le s \le n, E_s \in \partial G\} \exists \rho_{i1}, \rho_{i2}, \sigma_i \in \mathbb{R}$:

$\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 > 0$, $\sigma_i \neq 0 \Rightarrow \rho_{i2} \neq 0$ und für $d_{ij} \neq 0$

$$\rho_{i1} u_j(E_i) + \rho_{i2} d_{ij} a_j(E_i) u_{jx_j}(E_i) = -\lambda \sigma_i u_j(E_i)$$

Wie unter ¶ S. 33 in Abschnitt 3 werden Funktionen $f_j$ auf $k_j$ vermöge $x_j = l_j x$ als von $x \in [0,1]$ abhängig aufgefaßt.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^G & \cong & \Pi(G) \\ \swarrow ? & & \uparrow \\ (\mathbb{R}^N)^{[0,1]} & \cong & \prod_{j=1}^{N} \mathbb{R}^{[0,l_j]} \end{array}$$

Abkürzend werde stets $f_j(x) = f_j(xl_j)$ gesetzt, außerdem bezeichne ' die Differentiation nach x, so daß (5.1) übergeht in

$$\mathcal{L}_j u_j = (l_j^2 r_j)^{-1} (a_j u_j')' - q_j u_j .$$

(5.5)
$$y_1(x) := \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{pmatrix}_{N\times 1}, \quad y_2(x) := \begin{pmatrix} l_1^{-1} a_1(x)\, u_1'(x) \\ \vdots \\ l_N^{-1} a_N(x)\, u_N'(x) \end{pmatrix}_{N\times 1}$$

$$D_{22}(x) := \operatorname*{Diag}_{1\le j\le N} \left( \frac{l_j}{a_j(x)} \right), \quad E_{11}(x) := \operatorname*{Diag}_{1\le j\le N} \left( l_j r_j(x) \right)$$

$$D_{11}(x) := -\operatorname*{Diag}_{1\le j\le N} \left( l_j r_j(x) q_j(x) \right)$$

Mit (5.5) wird (5.4.b) zu einem kanonischen System

(5.5.1)
$$\begin{cases} y_1' - D_{22} y_2 = 0 \\ y_2' + D_{11} y_1 = -\lambda E_{11} y_1 . \end{cases}$$

Die in (5.4.a) enthaltene Bedingung $u \in \Pi(G)$ und $(K^*)$ treten nun zusammen mit (d) und $(d_\lambda)$ als Randbedingungen zu (5.5.1) auf, die wie folgt eingeordnet werden.

$$(A)\quad \psi_1 := \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(1) \end{pmatrix}_{2N\times 1} \qquad \psi_2 := \begin{pmatrix} -y_2(0) \\ y_2(1) \end{pmatrix}_{2N\times 1}$$

Zu jeder Ecke $E_i$ werden die Indices der $\gamma_i$ verschiedenen mit $E_i$ inzidenten Kanten durch

$$j(i,1),..,j(i,s),..,j(i,\gamma_i)$$

bezeichnet und $\gamma_i$-1 Zeilenvektoren $r(i,s) = (r_\tau(i,s))_{1\times 2N}$ unter Auszeichnung der Kante $k_{j(i,1)}$ gebildet, zu $1\leqq\tau\leqq 2N$ mit

$$(B)\quad r_\tau(i,s) := \begin{cases} 1, \text{ falls } s=1, d_{ij(i,1)} = -1, & \tau = j(i,1) \\ 1, \text{ falls } s=1, d_{ij(i,1)} = 1, & \tau = N+j(i,1) \\ -1, \text{ falls } s\neq 1, d_{ij(i,s)} = -1, & \tau = j(i,s) \\ -1, \text{ falls } s\neq 1, d_{ij(i,s)} = 1, & \tau = N+j(i,s) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

für $\gamma_i \geqq 2$ und

$$(C)\quad r_\tau(i,1) := \begin{cases} \rho_{i1}, \text{ falls } d_{ij(i,1)} = -1, & \tau = j(i,1) \\ \rho_{i1}, \text{ falls } d_{ij(i,1)} = 1, & \tau = N+j(i,1) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

für $\gamma_i = 1$. Die Stetigkeitsforderung in einem Verzweigungsknoten heißt nun: $r(i,s)\,\psi_1 = 0$ für $2\leqq s\leqq\gamma_i$.
Unter Hinzunahme von $n - |\partial G|$ Zeilenvektoren aus 0'en werden die zu allen Ecken gebildeten $r(i,s)$ als Zeilenvektoren zu einer $2N \times 2N$ - Matrix $R_1$ so zusammengefaßt, daß bei Vektoren $r(i,1)$ zu Randecken das von 0 verschiedene Element in der Diagonalen von $R_1$ steht. Da zu $i \neq i^\circ$ stets $r_\tau(i,s)\, r_\tau(i^\circ,s) = 0$ ist, gilt

$$(D)\quad \operatorname{rang} R_1 = 2N - n + |\{E_i \in \partial G : \rho_{i1} \neq 0\}|.$$

Die Matrix $P_2 := \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}_{2N\times 2N}$ werde mit den $N\times N$ - Matrizen

$P_{\alpha\beta} := (P_{\alpha\beta jk})$ und

$$(E)\quad P_{\alpha\beta jk} := \begin{cases} 1, \text{ falls } \pi_j(\alpha l_j) = \pi_k(\beta l_k) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

gebildet. (Es ist übrigens $P_{00} + P_{11} - P_{01} - P_{10} = D^*D$.) In $P_{00}$ und $P_{11}$ werden die 1'en in der Diagonalen, die von Randecken $\pi_j(\alpha l_j) \in \partial G$ herrühren, durch $\rho_{i2}$ ersetzt, falls $\pi_j(0) = E_i$ bzw. $\pi_j(l_j) = E_i$ ist. Mit den so entstandenen Matrizen $R_{00}$ bzw. $R_{11}$ sei

$$R_2 := \begin{pmatrix} R_{00} & P_{01} \\ P_{10} & R_{11} \end{pmatrix}_{2N\times 2N}.$$

Da jeder Ecke $E_i$ genau $\gamma_i$ gleiche Zeilen in $R_2$ entsprechen und da $R_2$ in n entsprechende Blöcke zerfällt, gilt

$$(F)\quad \operatorname{rang} R_2 = n - |\{E_i \in \partial G : \rho_{i2}=0\}|.$$

Mit (A),(B),(C) und (E) werden alle Randbedingungen zusammengefaßt im Falle (d) zu

$$(G)\quad R_1 \psi_1 + R_2 \psi_2 = 0$$

und im Falle $(d_\lambda)$ zu

$$(G_\lambda)\quad R_1 \psi_1 + R_2 \psi_2 = -\lambda R_3 \psi_1,$$

worin

$$R_3 := (r^{\partial}_{km})_{2N\times 2N}, \text{ und } r^{\partial}_{km} := \begin{cases} \sigma_i, \text{ falls } k=m,\ \gamma_i=1, \\ \quad d_{ik}=-1 \text{ oder} \\ \quad\quad d_{i,k-N}=1 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Zu (G) werden jetzt Matrizen S, $\tilde{R}_1$ und $\tilde{R}_2$ so bestimmt, daß die Aufgabe (5.5.1) mit (G) S-hermitesch im Normalfall wird, insbesondere nach SCH [2](2.3) also

$$(L_o)\quad \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ \tilde{R}_1 & \tilde{R}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ \tilde{R}_1 & \tilde{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

gelten muß, wobei $I := I_{2N\times 2N}$ sei.
Da nach Konstruktion zu jedem Verzweigungsknoten genau eine Zeile in $R_1$ bestehend aus 0'en vorkommt, sind die allen diesen entsprechenden $|\operatorname{Int} E|$ Zeilen von $R_2$ (gleiche Indices)

linear unabhängig. Wegen (D), (F) und $\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 > 0$ hat die $2N \times 4N$ - Matrix $(R_1, R_2)$ daher maximalen Rang.

$$(H) \quad \text{rang}\,(R_1, R_2) = 2N$$

Da in den $\gamma_i$ Zeilen $z_i$ von $R_2$, die zu einem Verzweigungsknoten $E_i$ gehören, die 1'en gerade an den Stellen stehen, an denen $r_\tau(i,s) \neq 0$ gilt, und da jede Zeile $r(i^\circ, s^\circ)$ mit $i \neq i^\circ$ keine von 0 verschiedenen Elemente dort haben kann, wo sie in $z_i$ vorkommen, stehen außerhalb der Diagonalen von $R_1 R_2^*$ nur 0'en. Es ist übrigens $R_2 = R_2^*$, da $P^*_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$.

$$(I) \quad R_1 R_2^* = R_2 R_1^*$$

Mit (H) und (I) sind im Falle (d) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür erfüllt, daß (G) zu einer Randbedingung im Normalfall im Sinne von SCH [2] §§1-3 äquivalent ist. Mit

$$(J) \quad \begin{aligned} \overset{\sim}{R}_1 &:= -(R_1 R_1^* + R_2 R_2^*)^{-1} R_2 \\ \overset{\sim}{R}_2 &:= -(R_1 R_1^* + R_2 R_2^*)^{-1} R_1 \\ Q &:= \text{orthogonale Projektion auf kern } R_2 \\ P &:= I - Q \\ R &:= R_1 Q + R_2 P \quad (R \text{ ist wegen (I) und (H) invertierbar, vgl. SCH [2](3.14))} \\ V &:= -R^{-1} R_1 + Q \\ W &:= \overset{\sim}{R}_2 P R^{-1} \end{aligned}$$

sind V und W symmetrische Matrizen mit $VQ = 0$, so daß

$$(L) \quad \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ \overset{\sim}{R}_1 & \overset{\sim}{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ W & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -W & I \end{pmatrix}$ Vektoren der Gestalt $\begin{pmatrix} 0_{2N\times 1} \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}_{4N\times 1}$ invariant läßt, ist (G) gleichbedeutend zu

$$(5.5.2) \qquad (Q - V)\,\psi_1 + P\,\psi_2 = 0$$

oder

$$\begin{cases} Q\,\psi_1 = 0 & \text{(wesentliche Randbedingungen)} \\ P\,\psi_2 - V\,\psi_1 = 0 & \text{(restliche Randbedingungen)} \end{cases}$$

Mit (L) wird gerade $(L_o)$ gezeigt, vgl. SCH [2](3.16), die genannten Bedingungen an V und W ergeben sich mit (I) aus

$$R_1 R^* = R R_1^*,\ V = -R^{-1}R_1 P \text{ und } R_2 R^* = R R_2^*,\ P R^{-1} R_2 = R^{-1} R_2 .$$

Im Falle der $\lambda$ - abhängigen Randbedingung $(d_\lambda)$ ist wegen (H), (I), $R_2 R_3 = R_3 R_2$, $R_3^* = R_3$ und dann SCH [2](4.2 und 12) auch eine $(L_o)$ entsprechende Darstellung möglich, wobei $R_1$ durch $R_1 + \lambda R_3$ zu ersetzen ist und im allgemeinen sich $\tilde{R}_1$ und $\tilde{R}_2$ ändern. Hier kann man jedoch darauf verzichten und zusätzlich zu (J) direkt

$$(J_\lambda)\quad V_1 := R^{-1}R_3 \text{ mit } V_1^* = V_1 \text{ und } V_1 Q = 0$$

wählen. Die Diagonalmatrix $R_3$ besteht nämlich aus Spaltenvektoren $\sigma_i e_s$ mit $e_s := (\delta_{sk})_{2N\times 1}$, für die mit der Voraussetzung unter $(d_\lambda)$ geschlossen wird

$$\sigma_i \neq 0 \Longrightarrow Qe_s = 0 \text{ und } Pe_s = e_s \Longrightarrow R^{-1}\sigma_i e_s = \rho_{i2}^{-1}\sigma_i e_s .$$

Multipliziert man $(G_\lambda)$ von links mit $R^{-1}$ und berücksichtigt $R^{-1}R_2 = P$, $R^{-1}R_1 = Q$, so ist $(d_\lambda)$ äquivalent zur Randbedingung

$$(5.5.2_\lambda)\qquad (Q - V)\,w_{\gamma 1} + P\,w_{\gamma 2} = -\lambda V_1 w_{\gamma 1},$$

die wie oben in $Q\,w_{\gamma 1} = 0$ und $P\,w_{\gamma 2} - V w_{\gamma 1} = -\lambda V_1 w_{\gamma 1}$ zerfällt. Insgesamt erscheint die Aufgabe (5.4) als ein kanonisches REWP (5.5.1,2 oder $2_\lambda$) im Sinne von E.HÖLDER, das ein spezielles S - hermitesches REWP im Normalfalle darstellt, vgl. SCH [2]§7:

$$(5.6)\qquad y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}_{2N\times 1},\quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} I_{N\times N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{N\times N} & 0 \\ 0 & -I_{N\times N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{N\times N} \end{pmatrix}_{4N\times 4N}$$

$$(A_1, B_1)_{4N\times 2N} := (Q-V, P)\,\mathcal{B}$$

$$(A_2, B_2)_{4N\times 2N} := \begin{cases} 0, & \text{im Falle } (d) \\ (-V_1, 0)\,\mathcal{B}, & \text{im Falle } (d_\lambda) \end{cases}$$

$$(A_3, B_3)_{4N\times 2N} := (-P, Q)\,\mathcal{B}$$

$$\mathcal{F}y := \begin{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & -D_{22} \\ D_{11} & 0 \end{pmatrix} y \\ A_1 y(0) + B_1 y(1) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}y := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{11} & 0 \end{pmatrix} y \\ A_2 y(0) + B_2 y(1) \end{pmatrix}, \quad Sy := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_{N\times N} \\ I_{N\times N} & 0 \end{pmatrix} \\ A_3 y(0) + B_3 y(1) \end{pmatrix}$$

Dann ist $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}$, und (5.5.1,2 oder $2_\lambda$) äquivalent zu

(5.6.1) $\qquad \mathcal{F} y = -\lambda \mathcal{G} y.$

Zur weiteren Behandlung werden folgende Vektorräume und zu $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und $S$ gehörende Skalarprodukte f und g eingeführt, vgl. SCH [1]§§1-3 [2]§7.

(M)
$$\mathcal{Y}_o := \prod_{k=1}^{2N} C([0,1]) \qquad \mathcal{F}_o := \prod_{k=1}^{2N} C^1([0,1])$$

$\mathcal{H}_o := \mathcal{Y}_o \times \mathbb{R}^{2N}$, so daß $\mathcal{F}: \mathcal{F}_o \to \mathcal{H}_o$, $\mathcal{G}: \mathcal{Y}_o \to \mathcal{H}_o$.

Die Komponenten von $y \in \mathcal{Y}_o$ werden stets wie folgt indiziert

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1N} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{F}_1 := \{y \in \mathcal{F}_o : y_1' = D_{22} y_2,\ Q \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(1) \end{pmatrix} = 0\}$$

$$\mathcal{R}_1 := \{y \in \mathcal{F}_o : \mathcal{F}y \in \mathcal{G}\mathcal{Y}_o\} \subseteq \mathcal{F}_1$$

$$\mathcal{R}_o := \{y \in \mathcal{F}_o : \mathcal{F}y = \mathcal{G}y = 0\}$$

Zu $y, z \in \mathcal{F}_o$ und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \end{pmatrix}$ wie in (A) sei

(5.7)
$$f(y,z) := \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} 0 & -I_{N\times N} \\ I_{N\times N} & 0 \end{pmatrix} z \right)^* \left( y' + \begin{pmatrix} 0 & -D_{22} \\ D_{11} & 0 \end{pmatrix} y \right) dx$$
$$+ \left(A_3 z(0) + B_3 z(1)\right)^* \left(A_1 y(0) + B_1 y(1)\right)$$
$$= \int_0^1 (z_1^* y_2' - z_2^* y_1' + z_2^* D_{22} y_2 + z_1^* D_{11} y_1)\, dx$$
$$+ \mathfrak{z}_2^* Q\, \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{z}_1^* V\, \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{z}_1^* P\, \mathfrak{w}_2,$$

und zu $y,z \in \mathcal{Y}_o$

(5.8)
$$g(y,z) := \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} 0 & -I_{N\times N} \\ I_{N\times N} & 0 \end{pmatrix} z \right)^* \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{11} & 0 \end{pmatrix} y \right) dx$$
$$+ \left(A_3 z(0) + B_3 z(1)\right)^* \left(A_2 y(0) + B_2 y(1)\right)$$
$$= \int_0^1 z_1^* E_{11} y_1\, dx + \mathfrak{z}_1^* V_1\, \mathfrak{w}_1,$$

wobei der $V_1$ enthaltende Summand im Falle (d) natürlich fortfällt. Mit den Erklärungen (5.4), von P und von Q folgt sofort, daß f und g hermitesch in $\mathcal{F}_o$ bzw. $\mathcal{Y}_o$ sind. Außerdem reduziert sich f in $\mathcal{F}_1$ wegen

$$\int_0^1 z_1^* y_2' dx = -\int_0^1 z_2^* D_{22} y_2\, dx + \mathfrak{w}_2^* (P + Q)\, \mathfrak{z}_1$$

auf

(5.7.1) $$f(y,z) = \int_0^1 (z_1^* D_{11} y_1 - z_2^* D_{22} y_2)\, dx + \mathfrak{z}_1^* V\, \mathfrak{w}_1.$$

Zur leichteren Einordnung sei noch vermerkt, daß abweichend von SCH hier $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, f, g$ und V statt F,G,F( , ),G( , ) bzw.$V_o$ bei SCH geschrieben wurde, im übrigen alle spezifischen Bezeichnungen von SCH übernommen wurden, sofern sie hier ihre Bedeutung behalten können.
Kehrt man zu $u,v \in \Delta$ zurück, wobei $\Delta$ erklärt wird mit

$$\Delta := \{u \in C^2_{K^*}(G) : \forall i \in \{1,..,n\} : (\gamma_i = 1, \rho_{i2} = 0 \Longrightarrow u(E_i) = 0)\},$$

und entsprechen dann y und z gemäß (5.5),(5.6) u bzw. v, so liegen y und z in $\mathfrak{F}_1$. Analog zum Schluß bei $(J_\lambda)$ gilt nämlich in $\Delta$ mit

$$(N)\qquad \chi_{km} := \begin{cases} \rho_{im}, \text{falls } \gamma_i = 1 \text{ und } d_{ik} = -1 \text{ oder } d_{i,k-N} = 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$R_1 \psi_1 = \operatorname*{Diag}_{1\le k\le 2N} (\chi_{k1})\, \psi_1 \Longrightarrow Q\,\psi_1 = Q\,R^{-1} R_1\,\psi_1 = 0.$$

$$(5.9)\qquad f(y,z) = -f_o(u,v) - \rho(u,v) \text{ mit}$$

$$f_o(u,v) := \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left( r_j(x)\, l_j q_j(x)\, u_j(x)\, v_j(x) + \frac{a_j(x)}{l_j}\, u_j'(x)\, v_j'(x) \right) dx$$

$$\rho(u,v) := \sum_{\substack{i=1 \\ \gamma_i = 1,\ \rho_{i2} \neq 0}}^{n} \rho_{i1}\, \rho_{i2}^{-1}\, u(E_i)\, v(E_i)$$

$$(5.10)\qquad g(y,z) = g_o(u,v) + \sigma(u,v) \text{ mit}$$

$$g_o(u,v) := \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 l_j\, r_j(x)\, u_j(x)\, v_j(x)\, dx$$

$$\sigma(u,v) := \sum_{\substack{i=1 \\ \gamma_i = 1,\ \sigma_i \neq 0}}^{n} \sigma_i\, \rho_{i2}^{-1}\, u(E_i)\, v(E_i)$$

Beweis (5.10) folgt sofort aus (5.5), $(J_\lambda)$ und $\mathfrak{Z}_1^* V_1\, \psi_1 = \sigma(u,v)$. Zu (5.9) bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$-\rho(u,v) = \mathfrak{Z}_1^* V\, \psi_1.$$

Unter Verwendung von (N) ergibt sich wegen (K*) und der Stetigkeitsbedingung in den Verzweigungsknoten

$$R_1\,\psi_1 + R_2\,\psi_2 = (\delta_{1k}\chi_{k1})_{2N\times 2N}\,\psi_1 + (\delta_{1k}\chi_{k2})_{2N\times 2N}\,\psi_2,$$

außerdem folgt mit der Bedingung in $\Delta$

$$Q\,(\delta_{1k}\chi_{km}) = 0 \text{ und } R^{-1}(\delta_{1k}\chi_{km}) = (\delta_{1k}\chi_{km}\chi_{k2}^{-1}) \text{ für } m = 1,2.$$

Eingedenk der Beziehungen unter (J), $R^{-1}R_2 = P$, $Q\,w_1 = Q\,y_1 = 0$, unter (5.5) und (5.4.a,c) ist schließlich

$$
\begin{aligned}
y_1^{*V} w_1 &= - y_1^{*} R^{-1} R_1 w_1 \\
&= y_1^{*} R^{-1} R_2 w_2 - y_1^{*} R^{-1} (\delta_{1k} \chi_{k1})\, w_1 - y_1^{*} R^{-1} (\delta_{1k} \chi_{k2})\, w_2 \\
&= y_1^{*}\, w_2 - (Q\, y_1)^{*} w_2 - \rho(u,v) - y_1^{*} R^{-1} (\delta_{1k} \chi_{k2})\, w_2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left( l_j^{-1} a_j(1)\, u_j'(1)\, v_j(1) - l_j^{-1} a_j(0)\, u_j'(0)\, v_j(0) \right) \\
&\quad - \rho(u,v) - \sum_{\substack{i=1 \\ \gamma_i = 1}}^{n} \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, l_j^{-1} a_j(E_i)\, u_j'(E_i)\, v_j(E_i) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ \gamma_i > 1}}^{n} v(E_i) \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\, l_j^{-1} a_j(E_i)\, u_j'(E_i) - \rho(u,v) \\
&= - \rho(u,v) \qquad \text{Q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Die Einordung von (5.4) in die SCHÄFKE - SCHNEIDER - Theorie wird in dem folgenden Satz zusammengefaßt. Es werde noch $V_i$ als positiv-semidefinit vorausgesetzt, d.h.

(5.4.$e_\lambda$) $\forall i \in \{1,\dots,n\}: (\gamma_i = 1 \implies \sigma_i \rho_{i2}^{-1} \geq 0)$.

(5.11) Satz Das zu (5.4) äquivalente REWP $\mathcal{F}y = -\lambda \mathcal{G} y$ wie unter (5.6) ist

(1) S - hermitesch im Normalfall

(2) nicht ausgeartet: $\mathfrak{N}_0 = 0$

(3) rechtsdefinit: g ist positiv-definit in $\mathfrak{G}_1$

(4) normal: alle Eigenfunktionen erfüllen $g(y,y) \neq 0$

(5) von endlichem Defekt

und ist, falls 0 kein Eigenwert von (5.4) ist,

(6) reduzibel: d.h. hier $\mathcal{G}\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathcal{F}\mathfrak{G}_0$

(7) stark-definit im Sinne von SCH [3](4.3).

Jeder Eigenwert $\lambda$ von (5.6.1) ist reell und genügt mit $\theta := \min\{q_j(\xi) : 1 \le j \le N, \xi \in [0, l_j]\}$ der Ungleichung

(8) $$\lambda \ge \inf\{\theta\, g_o(u,u) + \rho(u,u) : u \in C^2_{K^*}(G),\ \sigma(u,u) + g_o(u,u) = 1\},$$

(9) außerdem besitzt (5.6.1) höchstens abzählbar viele Eigenwerte ohne endlichen Häufungspunkt.

Beweis (1) und (2) folgen aus den vorangegangenen Überlegungen und (5.1), ebenso (3) und (4) mit Hilfe von (5.10) und (5.4.$e_\lambda$). Mit (1) und den Sätzen SCH [1](3.9) und (1.5) ergibt sich (5), genauer gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

(O) $$\dim \ker (\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G}) = \dim \mathcal{H}_o / (\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G})\mathfrak{F}_o \le 2N.$$

Schon aus (1) und (4) folgt (9) und, daß es nur reelle Eigenwerte geben kann, vgl. SCH [1](3.10), mit (4) liest man auch (8) aus der Darstellung (5.9) ab, da wegen (5.1) $-f_o(u,u) \le -\theta\, g_o(u,u)$ ist.
Nun besteht die Möglichkeit, nötigenfalls $r_j q_j$ durch $r_j q_j + \tilde{\lambda} r_j$ mit einem geeigneten Nichteigenwert $\tilde{\lambda}$ so zu ersetzen, daß die entsprechend modifizierte Aufgabe 0 nicht als Eigenwert besitzt, was daher o.B.d.A. für (5.6.1) angenommen werden kann. Mit (O) ist $\dim \mathcal{H}_o / \mathcal{F}\mathfrak{F}_o = 0$, und damit (6) gezeigt.
Im rechtsdefiniten Fall liegt starke Definitheit vor, falls im Definitheitsraum von $g$, $[\mathcal{G}y, \mathcal{G}y]_{\mathcal{H}_o} \le \tilde{\gamma} g(y,y)$, d.h. hier in $\mathfrak{F}_1$, $\int_0^1 y_1^* E_{11}^2 y_1 dx + \omega_{\beta 1}^* V_1 V_1 \omega_{\beta 1} \le \tilde{\gamma} g(y,y)$ mit einer Konstanten $\tilde{\gamma} > 0$ gilt, vgl. SCH [3]§4. (7) ergibt sich schließlich aus (5.1) und (5.4.$e_\lambda$), es kann natürlich auch mit SCH [3](4.5) geschlossen werden. Q.e.d.

Im Falle (d) verschwinden die $\sigma_i$ enthaltenden Terme natürlich überall. Wegen (8) und (9) kann (5.6.1) nur endlich viele negative Eigenwerte $\lambda$ besitzen und kann keine solche besitzen, falls $\theta \ge 0$ und $V$ negativ-semidefinit ist, falls also alle $q_j \ge 0$ und alle $\rho_{i1}\, \rho_{i2}^{-1} \ge 0$ sind.

Es wird nun o.B.d.A. angenommen, daß $\lambda = 0$ keine Lösung von $\mathcal{F}y = -\lambda \mathcal{G}y$ ist. Dann existiert wegen der Reduzibilität von (5.6.1) zu jedem $y \in \mathcal{Y}_o$ ein eindeutig bestimmtes $\mathcal{A}y \in \mathcal{X}_1$ mit

$$\mathcal{F}\mathcal{A}y = -\mathcal{G}y, \tag{5.12}$$

wodurch ein surjektiver linearer Operator $\mathcal{A}: \mathcal{Y}_o \longrightarrow \mathcal{X}_1$ erklärt wird, für den die Gleichung $y = \lambda \mathcal{A} y$ genau dann besteht, wenn y und $\lambda$ (5.6.1) lösen. In $\mathcal{Y}_o$ gilt

$$(P) \quad g(\mathcal{A}y, z) = -f(\mathcal{A}y, \mathcal{A}z) = g(y, \mathcal{A}z).$$

Daher ist $\mathcal{A}$ in $\mathcal{Y}_o$ hermitesch bezüglich des dort positivsemidefiniten Skalarproduktes g, so daß mit (5.11.4,5 und 9) der Satz von WIELANDT [1] auf $\mathcal{A}$ anwendbar ist. Bezeichnet man mit $\lambda_1 \leq .. \leq \lambda_\nu \leq \lambda_{\nu+1} \leq ..$ alle Eigenwerte, der Vielfachheit entsprechend oft gezählt, und mit $\tilde{y}_\nu$ zu $\lambda_\nu$ gehörende orthogonale und normierte Eigenlösungen

$$\tilde{y}_\nu = \lambda_\nu \mathcal{A} \tilde{y}_\nu, \quad g(\tilde{y}_\nu, \tilde{y}_o) = \delta_{\nu o},$$

so gelten für jedes $y \in \mathcal{Y}_o$ die

(5.13) Entwicklungsformeln

$$(1) \quad g(\mathcal{A}y, y) = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} g^2(y, \tilde{y}_\nu),$$

und mit $\|z\|_g := \sqrt{g(z,z)}$

$$(2) \quad \|\mathcal{A}y\|_g^2 = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu^2} g^2(y, \tilde{y}_\nu).$$

Hierin erstrecken sich die Summationen über alle $\lambda_\nu$. Aus (5.13) läßt sich die Existenz von Eigenwerten ablesen. Besteht nämlich in einem k-dimensionalen Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}_o$ die Ungleichung $g(\mathcal{A}y, y) > 0 \quad (g(\mathcal{A}y, y) < 0)$ für $0 \neq y \in \mathcal{U}$, so gibt es bei Zählung der Vielfachheit mindestens k positive (negative) Eigenwerte $\lambda$, vgl. SCH [1] Abschnitt 4. Genauer gilt hier:

(5.14) Das Eigenwertproblem $\mathcal{F}y = -\lambda \mathcal{G}y$ besitzt abzählbar unendlich viele positive Eigenwerte $\lambda$.

Beweis Eingeschränkt auf $\mathfrak{F}_1$ ist $\mathcal{A}$ injektiv, denn in $\mathfrak{F}_1$ (nicht in $\mathfrak{H}_0$) gilt der Schluß

$$(Q) \quad y \in \mathfrak{F}_1,\ \mathcal{A}y = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{A}y = 0 = \mathcal{G}y \Longrightarrow y = 0,$$

außerdem ist g positiv-definit in $\mathfrak{F}_1$. Nach (5.11.8 und 9) kann es nur endlich viele negative $\lambda_\nu$ geben, und der von $\{y_\nu : \lambda_\nu < 0\}$ aufgespannte Teilraum $\mathcal{M}_n$ von $\mathfrak{F}_1$ ist von endlicher Dimension. Bezeichnet $\mathcal{M}$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{M}_n$ in $\mathfrak{F}_1$ bezüglich g, so gilt

$$\dim \mathcal{M} = \infty.$$

Wegen (5.13.1) und (P) ist mit $a(y,z) := g(\mathcal{A}y, z)$ ein positiv-semidefinites und symmetrisches Skalarprodukt in $\mathcal{M}$ gegeben. $\|\cdot\|_g$ stellt aber eine Norm in $\mathfrak{F}_1$ dar, so daß mit der CAUCHY - SCHWARZschen Ungleichung angewandt auf $a(y, \mathcal{A}y)$

$$\|\mathcal{A}y\|_g^2 = a(y, \mathcal{A}y) \leq \sqrt{g(\mathcal{A}y, y)}\ \sqrt{a(\mathcal{A}y, \mathcal{A}y)}$$

und mit (Q) sich a sogar als positiv-definit in $\mathcal{M}$ erweist. Da jedes Id - $\lambda\mathcal{A}$ von endlichem Defekt ist, gibt es unendlich viele positive $\lambda_\nu$. Q.e.d.

Mit (5.13) läßt sich an die Eigenwerttheorie vollstetiger und hermitescher Operatoren im Hilbertraum anschließen. Eingedenk der Bezeichnung unter (M) ist g positiv-definit in

$$\mathfrak{H}_1 := \{y \in \mathfrak{H}_0 : y_2 = 0\},$$

und $\mathcal{A} : \mathfrak{H}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_1$ ist ein Vektorraumisomorphismus, da $(\mathcal{A}y = 0 \Longrightarrow y_1 = 0)$ und $\mathcal{A}y = \mathcal{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ stets gelten. Mit der Projektion $p_1(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_1 : \mathfrak{H}_0 \longrightarrow \mathfrak{H}_1$ wird nun statt $\mathcal{A}$ der Operator

$$\tilde{\mathcal{A}} = p_1 \circ \mathcal{A} : \mathfrak{H}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_1$$

betrachtet, der mithin jedem $\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_1 \in \prod_{k=1}^{N} C([0,1])$, dasjenige Element $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \prod_{k=1}^{N} C^2([0,1])$, zuordnet, zudem $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

die Lösung von

$$\begin{cases} z_2 = D_{22}^{-1} z_1', \quad z_2' + D_{11} z_1 = -E_{11} y_1, \\ A_1 \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} z_1(1) \\ z_2(1) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist. Da $y = \lambda \mathcal{A} y$ genau dann erfüllt ist, wenn $y_1$ und $\lambda$ die Gleichung $\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \tilde{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen, und deshalb durch $\begin{pmatrix} \tilde{y}_{\nu 1} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lambda_\nu$ alle diese Lösungen gegeben sind, und da in g nur die Anteile aus $p_1(\mathcal{Y}_0)$ eingehen, ist mit (5.13) $\tilde{\mathcal{A}}$ in der Norm $\|\cdot\|_g$ beschränkt und läßt sich eindeutig fortsetzen auf die Vervollständigung $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ von $\mathcal{Y}_1$ bezüglich g. Dabei bleiben die Entwicklungsformeln (5.13) für $\tilde{\mathcal{A}}$ in $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ gültig, so daß $\tilde{\mathcal{A}}$ im Hilbertraum $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ vollstetig mit $\{\lambda_\nu^{-1} : 1 \leq \nu \in \mathbb{N}\}$ als Spektrum ist.

Bezeichne $\mathcal{S}$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf [0,1], deren Träger kompakt ist und in (0,1) liegt. Dann liegt der Raum $\{y \in \mathcal{Y}_1 : \forall\, j \in \{1,..,N\} : y_{1j} \in \mathcal{S}\}$ in $\tilde{\mathcal{A}}\, \mathcal{Y}_1$, und sein Abschluß bezüglich $\|\cdot\|_g$ ist $\{y \in (\mathbb{R}^N)^{[0,1]} : \forall\, j \in \{1,..,N\} : y_{1j} \in L_2([0,1])\}$, womit sich der folgende Entwicklungssatz ergibt.

(5.15) Satz Für jedes $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{Y}}_1$, insbesondere für jedes $y \in \mathcal{Y}_1$, gilt in der Norm $\|\cdot\|_g$ die Entwicklung

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} g(y, \tilde{y}_\nu) \begin{pmatrix} \tilde{y}_{\nu 1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die starke Definitheit erlaubt mit den Sätzen SCH [3] (4.7) und (4.8) eine Darstellung von $\tilde{\mathcal{A}} y$ in $\mathcal{Y}_1$:

(5.16) Zu jedem $y \in \mathcal{Y}_1$ sind die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g(\tilde{\mathcal{A}} y, \tilde{y}_\nu) \begin{pmatrix} \tilde{y}_{\nu 1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

in [0,1] absolut gleichmäßig konvergent. Liegt y im Abschluß von $p_1(\mathcal{R}_1) = \tilde{\mathcal{A}}\, \mathcal{Y}_1$ bezüglich der Norm

$|z|^{(0)} := |(\sum_j z_{1j}^2)^{1/2}|^{(0)}_{[0,1]}$ in $\mathcal{Y}_1$, so gilt in [0,1]

$$(\tilde{\mathcal{A}}\, y)(x) = p_1(\mathcal{A}\, y)(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} g(y,\tilde{y}_\nu) \begin{pmatrix} \tilde{y}_{\nu 1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verfolgt man die Transformationen auf S.80 zurück mittels

$$\iota = \left(y \longrightarrow (x_j \longrightarrow y_{1j}(x_j\, l_j^{-1}))_{N\times 1}\right)$$

und beachtet (A) bis ($G_\lambda$) und (M), so wird mit $\iota$ der Raum $\mathcal{R}_1$ in $C^2_{K*}(G)$ eingebettet. Mit einem Abgeschlossenheitsschluß ähnlich dem bei (1.7.3) folgt desweiteren

$$\text{(R)} \qquad \overline{p_1(\mathcal{R}_1)}^{|\cdot|^{(0)}} = \overline{\tilde{\mathcal{A}}\,\mathcal{Y}_1}^{|\cdot|^{(0)}} \subseteq \{y \in \mathcal{Y}_1 : \iota(y) \in C(G)\}.$$

Gleichheit in (R) gilt zum Beispiel dann, wenn $\partial G = \emptyset$ ist oder wenn die NEUMANNrandbedingung (5.4.d, alle $\rho_{i1} = 0$) gestellt wird, weil in beiden Fällen nach dem STONE - WEIERSTRASS'schen Satz $\iota(\mathcal{R}_1)$ dicht in $(C(G), |\cdot|^{(0)}_G)$ liegt, vgl. (1.7).

Alle Eigenlösungen des REWPes (5.4) sind gerade

$$\tilde{u}_\nu := \iota(\tilde{y}_\nu) \in C^2_{K*}(G) \text{ zu } \lambda_\nu,$$

und (5.10) anwendend werde zu (5.15) noch ergänzt:

(5.17) Korollar Jede stetige Funktion auf G ist gemäß der zu ( , ) gehörenden Norm entwickelbar in die Reihe

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u,\tilde{u}_\nu)\, \tilde{u}_\nu,$$

wobei in C(G) gesetzt wird: $(u,v) = g(\iota^{-1}(u), \iota^{-1}(v))$, d.h.

$$(u,v) := \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} r_j(x_j)\, u_j(x_j)\, v_j(x_j)\, dx_j + \sigma(u,v).$$

Für das Spektrum von $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A}$ gelten die Extremalprinzipien, Vergleichssätze und Verfahren des Abschnittes 4 in SCH [3].

Hier soll jedoch noch gezeigt werden, daß sich die Eigenwerte von (5.4) und zugehörige Eigenfunktionen als Lösungen des Variationsproblemes für das DIRICHLEtintegral unter passenden Nebenbedingungen gewinnen lassen. Diese Charakterisierung entspricht Theorem VI.3.1 bei REID, wo jedoch keine $\lambda$-abhängigen Randbedingungen betrachtet werden und zur Herleitung eine Darstellung der GREENschen Matrix benötigt wird, worauf hier wegen des Satzes von WIELANDT verzichtet werden kann. Mit (5.13) zeigt man nämlich:

(5.18) $y \in \mathcal{R}_1$:

$$-f(y,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu g^2(y,\tilde{y}_\nu).$$

Beweis Sei $z \in \mathcal{Y}_0$ mit $y = \mathcal{A} z$ und $\mathcal{F} y = \mathcal{F}\mathcal{A} z = -\mathcal{G} z$. Unter Verwendung von (P), (5.13) und den Gleichungen $\mathcal{F}\tilde{y}_\nu = -\lambda_\nu \mathcal{G}\tilde{y}_\nu$ rechnet man:

$$\begin{aligned} -f(y,y) &= -f(\mathcal{A} z, \mathcal{A} z) = g(\mathcal{A} z, z) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} g^2(z,\tilde{y}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} f^2(y,\tilde{y}_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu g^2(\tilde{y}_\nu, y) \end{aligned}$$ Q.e.d.

In $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ gilt nach (5.15) die Gleichung $\|y\|_g^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} g^2(y,\tilde{y}_\nu)$, was mit (5.18) sofort für jedes $\lambda_\nu$

$$\lambda_\nu = \min\{-f(y,y) : y \in \mathcal{R}_1,\ \|y\|_g = 1,\ \forall \kappa \in \{1,\dots,\nu-1\} : g(y,\tilde{y}_\kappa) = 0\}$$

nach sich zieht. Das Minimum wird mit $\tilde{y}_\nu$ angenommen, umgekehrt ist jede Lösung $y^\circ \in \mathcal{R}_1$ (oder $y^\circ \in \mathcal{F}_1$) von

$$-f(y,y) = \min!,\ \|y\|_g = 1,\ g(y,\tilde{y}_\tau) = 0 \text{ für } 1 \le \tau \le \nu-1$$

Eigenlösung zu $\lambda_\nu$, weil aus $g(y^\circ,\tilde{y}_\nu) < 1$ und $z^\circ := g(y^\circ,\tilde{y}_\nu)\tilde{y}_\nu$ sonst mit (5.15) folgen würde, daß $-f(z^\circ,z^\circ) < \lambda_\nu \le -f(y^\circ,y^\circ)$ gelten müßte.

Zusammenfassend gilt somit der folgende Satz.

(5.19) Satz Erklärt man in $C^1(G)$

$$\delta(u) := \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \left( r_j(x_j) q_j(x_j) u_j^2(x_j) + a_j(x_j) u_{jx_j}^2(x_j) \right) dx_j$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ \gamma_i=1, \rho_{i2}\neq 0}}^{n} \rho_{i1} \rho_{i2}^{-1} u^2(E_i),$$

so ergeben sich alle Eigenlösungen $\tilde{u}_\nu$ des Rand-Eigenwertproblemes (5.4) sukzessive als Lösungen der Variationsprobleme mit Nebenbedingungen [ν], $1 \leq \nu \in \mathbb{N}$,

$$[\nu] \quad \begin{cases} \Delta_\nu := \{u \in C^1(G) : (u,u) = 1, \forall \kappa \in \{1,..,\nu-1\} : (u, \tilde{u}_\kappa) = 0\} \\ \delta(\tilde{u}_\nu) = \min \{\delta(u) : u \in \Delta_\nu\} \end{cases}$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind gegeben durch

$$\lambda_\nu = \delta(\tilde{u}_\nu).$$

Jede Lösung eines Problemes [ν] ist Eigenlösung von (5.4) zum Eigenwert $\lambda_\nu$.

In den abschließenden Bemerkungen (5.20 - 22) werden noch das Anwachsen der Eigenwerte, die Bedingung (5.3) und weitere Aufgaben angesprochen, ohne daß jedoch die Herleitungen im einzelnen vorgeführt werden.

(5.20) λ-abhängige konsistente KIRCHHOFFbedingung
Wird in den Verzweigungsknoten statt (5.2) die Bedingung

$$(c_\lambda) \quad \forall\, i \in \{s : 1 \leq s \leq n, E_s \in \operatorname{Int} E\} \exists \rho_{i1}, \rho_{i2}, \sigma_i \in \mathbb{R}:$$

$$\sigma_i \geq 0, \ \rho_{i2} \neq 0 \text{ und}$$

$$\rho_{i1} u(E_i) + \rho_{i2} \sum_{j=1}^{N} d_{ij} a_j(E_i) u_{jx_j}(E_i) = -\lambda \sigma_i u(E_i)$$

vorgegeben, in der bei Stetigkeitsforderung der Term $u(E_i) = u_j(E_i)$ für $d_{ij} \neq 0$ so erscheinen kann, so führt die Aufgabe $(5.4.a,b,c_\lambda,d_\lambda,e_\lambda)$ wie oben auf ein S-hermitesches REWP im Normalfall, für das die Aussagen (5.11 - 19) sinngemäß

gelten. O.B.d.A. kann man $\rho_{i2} = 1$ annehmen und modifiziert die obigen Konstruktionen wie folgt: $R_1$ wird ersetzt durch $R_1 + \underset{1\le k\le 2N}{\mathrm{Diag}}(\varepsilon_{k1})$, worin $\varepsilon_{k1}$ erklärt wird durch

$$\varepsilon_{k1} = \begin{cases} \rho_{i1}, \text{falls } \gamma_i > 1 \text{ und } d_{ik} = -1 \text{ oder } d_{i,N-k} = 1, \\ 0, \text{sonst,} \end{cases}$$

in der Definition von $R_3$ in $(G_\lambda)$ streicht man die Einschränkung "$\gamma_i = 1$", behält $R_2$ bei und ergänzt dann (5.5.1) nach SCH [2] (4.2 und 12) zu einem S - hermiteschen REWP im Normalfall. Ähnlich, nur verwickelter, verfährt man, wenn in $(c_\lambda)$ $\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 > 0$ zugelassen wird statt $\rho_{i2} \neq 0$.

(5.21) Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte kann zunächst mit denselben Hilfsmitteln untersucht werden, welche im Falle der STURM - LIOUVILLE - Eigenwertaufgabe auf einem Intervall verwendet werden, etwa bei COURANT, HILBERT V.§11.5 und VI.§2.3, bei INCE §11.4 und bei KAMKE S.261 f. Zu jeder Kante $k_j$ wird die Gleichung (5.4.b) vermöge der LIOUVILLE - Transformation auf die Normalform

$$(1) \quad w_{j\xi\xi}(\xi) - \tilde{q}_j(\xi)\, w_j(\xi) = -\lambda\, \beta_j^2\, l_j^2\, w_j(\xi), \quad \xi \in [0,1]$$

mit $\beta_j > 0$ und $\tilde{q}_j \in C([0,1])$ gebracht. Dabei gehen die Randbedingungen (5.4.a,c,d,$d_\lambda$) in solche über, die mit (1) auf ein kanonisches, und damit S - hermitesches REWP im Normalfall führen, auch wenn die Stetigkeitsforderung in Int E und (5.2) nicht erhalten bleiben. (Man hat jetzt die Bedingung $(z_j^{-1} w_j)_{N\times 1} \in C^1_{K^*}(G)$ mit vorgegebenen positiven $z_j \in C^1([0,1])$ zu stellen.) Mit Hilfe des DIRICHLETintegrales oder der zu (1) gleichwertigen VOLTERRAschen Integralgleichung gelingt zunächst die Reduktion auf den Fall $\tilde{q}_j = 0$ für $1 \le j \le N$ und dann auf eine Form der Randbedingungen, die eine Charakterisierung der Eigenwerte erlauben, wie sie im Abschnitt 6 für die Aufgabe (5.4) mit konstanten Koeffizienten gewonnen wird. Erstrebenswert bleibt jedoch eine geschlossene Darstellung für die Asymptotik der Eigenwerte. Die bei CAMERER S.40 angegebene Formel (2.37) für einen speziellen Baum scheint plausibel , jedoch ist die Herleitung nicht stichhaltig.

(5.22) Ventile an den Verzweigungsknoten

Führt das REWP (5.4.a,b,d,$d_\lambda$,$e_\lambda$) mit der gewichteten KIRCHHOFFbedingung (5.3) auch auf ein S - hermitesches REWP? Jeder Fluß $d_{ij}a_j(E_i)u_{jx_j}(E_i)$ von $k_j$ bei $E_i$ werde also mit $c_{ij}>0$ gewichtet, wobei an den Randecken $c_{ij}=1$ gewählt wird. Sei

$$C_\kappa := \operatorname*{Diag}_{1\le j\le N}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\left(1-(-1)^\kappa d_{ij}\right)d_{ij}^2\right) \quad \text{für } \kappa=0 \text{ und } \kappa=1$$

und

$$C_c := \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}_{2N\times 2N}.$$

Mit den Matrizen $R_1,R_2,R_3$ und $C_c$, sowie mit den Bezeichnungen aus (5.5) und (5.6) läßt sich die durch (5.3) modifizierte Aufgabe zusammenfassen zu

$$(1)\quad \mathcal{F}_c y := \begin{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & -D_{22} \\ D_{11} & 0 \end{pmatrix} y \\ (R_1, R_2C_c)\,\mathcal{B}\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\lambda\, \mathcal{G}\, y.$$

Zwar erfüllen $R_1$ und $R_2C_c$ die Bedingung (H), da jedoch in vielen Fällen $R_1(R_2C_c)^* \neq R_2C_cR_1^*$ gilt, ergänzen in (1) die Randbedingungen das kanonische System im allgemeinen nicht zu einem S - hermiteschen REWP im Normalfall. Genauer kann man unter den Voraussetzungen aus (5.1 und 4) zeigen:

(2) Satz Gibt es eine lineare Abbildung $S_c:\mathcal{Y}_o \to \mathcal{H}_o$ mit den Eigenschaften

(*) (1) ist $S_c$ - hermitesch,

(**) $g_c$, erklärt durch $g_c(y,z):=[\mathcal{G}y,S_cz]_{\mathcal{H}_o}$, ist nicht die Nullform in $\mathcal{H}_1^c := \{y\in\mathcal{Y}_o : \mathcal{F}_c y \in \mathcal{G}\,\mathcal{Y}_o\}$,

so können nur die folgenden Fälle eintreten:

(a) $C_0 = C_1$

(b) An jedem Verzweigungsknoten $E_i$ sind alle $c_{ij}$ mit $E_i$ inzidenter Kanten $k_j$ gleich.

(c) $\Gamma$ enthält einen Stern $\Sigma$ mit Verzweigungsknoten $E_1$ und genügt mit $\Sigma$ der Bedingung

$$|E(\Sigma) \cap \partial\Gamma| \geq |E(\Sigma)| - 2.$$

Int $E(\Gamma) \setminus \{E_1\}$ erfüllt (b), nur bei $E_1$ können alle $c_{ij}$ untereinander verschieden sein.

Fallen $\Gamma$ oder $C_c$ nicht unter (2a,b,c), so treten schon bei einfachen Aufgaben nichtreelle Eigenwerte $\lambda$ auf, vgl. (6.15). Man muß daher zur komplexwertigen Theorie übergehen, und betrachtet dann zusätzlich das zu (1) adjungierte REWP

$$(5.5.1) \text{ und } \quad R_1 C_c^{-1} w_{\gamma 1} + R_2 w_{\gamma 2} = -\lambda R_3 w_{\gamma 1},$$

oder versucht LUMER folgend an die Halbgruppentheorie für lokale Operatoren anzuschließen. So ist etwa der durch (5.1) und (5.3) erklärte lokale Operator im Falle $\theta \geq 0$ lokaldissipativ in $G \setminus \partial G$ im Sinne von LUMER [2,3]. Über $\partial G$ hat man dann allerdings 0 - Randbedingungen zu fordern.

## 6. Eine charakteristische Gleichung für die Eigenwerte

Um die Eigenwerte der Aufgabe $(5.4.a-d,d_\lambda)$ mit konstanten Koeffizienten (5.1) genauer einzugrenzen, wird diese in eine äquivalente Aufgabe zu einer Matrixdifferentialgleichung zweiter Ordnung für $n\times n$ - Matrizen überführt, die die Adjazenzrelation der Ecken von $\Gamma$ respektieren.
Zu $\Gamma$ wird die Adjazenzmatrix $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\Gamma) = (e_{ih})_{n\times n}$ erklärt durch

$$(A)\quad e_{ih} := \begin{cases} 1, \text{ falls } \exists\, s=s(i,h)\in\{1,..,N\}: k_s \cap E = \{E_i, E_h\} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Schlingenfreiheit von $\Gamma$ stehen in der Diagonalen von $\mathfrak{E}$ nur 0'en, außerdem ist nach (1.1.c) der in (A) genannte Kantenindex $s = s(i,h)$ der $E_i$ mit $E_h$ verbindenden Kante eindeutig bestimmt. Es werde noch $s(i,h) := 1$ im Falle $e_{ih} = 0$ gesetzt.
Zu $n\times n$ - Matrizen $M, M^\circ$ sei $M \cdot M^\circ = (m_{ih} m^\circ_{ih})_{n\times n}$ das HADAMARD - Produkt von $M$ und $M^\circ$, $p(M)$ für $p: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bezeichne in diesem Abschnitt die Matrix

$$(B)\quad p(M) = (\mu_{ih})_{n\times n} \text{ mit } \mu_{ih} := \begin{cases} p(m_{ih}), \text{ falls } e_{ih}=1 \\ 0, \text{ falls } e_{ih}=0, \end{cases}$$

zu $p(z) = z^r$ mit $r\in\mathbb{R}$ werde speziell $p(M) =: M^{(r)}$ geschrieben.
$e$ bezeichne den Spaltenvektor $e = (1)_{n\times 1}$.

(6.1) Definitionen O.B.d.A. sei $r_j = 1$ in (5.1).

$$A = (a_{ih}) := \left(a_{s(i,h)}\right)_{n\times n},\quad L = (l_{ih}) := \left(l_{s(i,h)}\right)_{n\times n}.$$

$$\text{Zu } u = (u_j) \in \prod_{j=1}^{N} \mathbb{R}^{[0,l_j]} \text{ sei } u_{ih}: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ durch}$$

$$u_{ih}(x) := e_{ih} u_{s(i,h)}\left(l_{ih}\left(\frac{1+d_{is(i,h)}}{2} - x\, d_{is(i,h)}\right)\right)$$

erklärt, außerdem

$$U(x) := \left(u_{ih}(x)\right)_{n\times n}, \text{ so daß } U(0) = \left(u_{ih}\left(\pi^{-1}_{s(i,h)}(E_i)\right)\right).$$

Mit der Regel $e_{ih} d_{i\,s(i,h)} = -e_{ih} d_{h\,s(h,i)}$ folgt sofort

(6.2) $$U^*(x) = U(1-x)$$
$$U'^*(x) = -U'(1-x).$$

Wohldefiniertheit in den Verzweigungsknoten wird jetzt wie folgt beschrieben

(6.3) $u \in \Pi(G) \iff \exists\, \phi \in \mathbb{R}^n\colon U(0) = \phi e^* \cdot \mathcal{E},$

wobei dann $\phi = \left(u(E_i)\right)_{n\times 1}$ ist.

Die konsistente KIRCHHOFFbedingung (5.2) und die NEUMANNbedingung (5.4.d,alle $\rho_{i1} = 0$) in den Randecken lassen sich zusammenfassen zu

(6.4) $$\left(L^{(-1)} \cdot A \cdot U'(0)\right) e = 0.$$

Der Einfachheit halber wird im folgenden der Fall behandelt, daß alle Potentiale $q_j = 0$ sind. Sind beliebige konstante Potentiale vorgegeben, so lassen sich die Eigenwerte in zu (6.8) ähnlicher Weise charakterisieren.
Die Differentialgleichung (5.4.b) heißt hier

(6.5) $$L^{(-2)} \cdot A \cdot U''(x) = -\lambda U(x),$$

und $u \in C^2(G)$ ist genau dann Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda$ der Aufgabe (5.4.a - d,alle $\rho_{i1}=0$), wenn U Lösung der folgenden Aufgabe zu $\lambda$ ist:

(6.6) Gesucht wird eine Matrix $U = (u_{ih})_{n\times n} \neq 0$, deren Koeffizienten $u_{ih}$ in $C^2([0,1])$ liegen und für $e_{ih} = 0$ verschwinden, die (6.2), (6.4) und (6.5) erfüllt, und für die $U(0) = \phi e^* \cdot \mathcal{E}$ mit geeignetem $\phi \in \mathbb{R}^n$ ist.

Nach (5.11.8) kann (6.6) keine negativen Eigenwerte $\lambda$ besitzen, eine Lösung U von (6.6) ist daher wegen der Differentialgleichung (6.5) mit den Bildungen unter (B) von der Form

(6.7)

(1) $U(x) = \Phi \cdot \cos(x\sqrt{\lambda}\,B) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Psi \cdot B^{(-1)} \cdot \sin(x\sqrt{\lambda}\,B)$

für $\lambda > 0$ mit

(2) $B := L \cdot A^{(-1/2)}$

(3) $\Phi := U(0) = \phi e^* \cdot \mathfrak{E}$ und $\Psi = (\psi_{ih})_{n\times n} := U'(0)$.

Man beachte, daß der Zusammenhang zu einer Eigenfunktion $u \in C^2_{K^*}(G)$ durch (6.1) hergestellt wird, insbesondere gilt $\psi_{ih} = -e_{ih}\, d_{ij}\, l_j\, u_{jx_j}\left(\frac{1}{2}\, l_j(1+d_{ij})\right)$ für $j = s(i,h)$.
$\Phi$ und $\Psi$ werden durch die Bedingungen (6.2 - 4) bestimmt, und damit mögliche Eigenwerte $\lambda$ und Eckenverteilungen $\phi$ zugehöriger Eigenlösungen.

(6.8) Satz Für die Eigenwerte $\lambda$ der Aufgabe (6.6) und die Eckenverteilungen $\phi$ zugehöriger Eigenlösungen U können nur die folgenden Fälle eintreten:

(a) $\lambda = 0$ ist einfacher Eigenwert zur Eigenlösung $U = \text{const.}\ \mathfrak{E}$ und $\phi = \text{const.}\ e$.

(b) $0 \neq \lambda$ ist von der Form

$$\lambda = \lambda_k^{(j)} := a_j\, l_j^{-2}\, \pi^2\, k^2$$

mit einem geeigneten Kantenindex $j = s(i,h)$ und geeignetem $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann

(1) $\phi_h = (-1)^k \phi_i$ und $-\psi_{hi} = (-1)^k \psi_{ih}$.

(c) Ist $\lambda \neq 0$ nicht von der Form (b), so ist $\phi \neq 0$ und genügt mit (man beachte (B))

(2) $\mathfrak{D}(\lambda,A,L,\mathfrak{E}) := A^{(1/2)} \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\,B)\right)^{(-1)}$
$\quad - \text{Diag}\left[\left(A^{(1/2)} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\,B) \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\,B)\right)^{(-1)}\right)e\right]$

der Gleichung $\mathfrak{D}(\lambda,A,L,\mathfrak{E})\,\phi = 0$, und $\lambda$ erfüllt

(3) $\det \mathfrak{D}(\lambda,A,L,\mathfrak{E}) = 0$.

Alle reellen und positiven Lösungen $\lambda$ von (3) sind Eigenwerte von (6.6) der Vielfachheit $\dim \operatorname{kern} \mathfrak{D}(\lambda,A,L,\mathfrak{E})$.

Beweis Alle Matrizen const. $\mathfrak{E}$ sind Eigenlösungen zu $\lambda = 0$. Ist umgekehrt $L^{(-2)} \cdot A \cdot U''(x) = 0$ und daher

$$U(x) = \Phi + x(\Phi^* - \Phi),$$

so folgt mit $\Psi = \Phi^* - \Phi$ eingesetzt in (6.4) und mit (6.7.3)

$$(L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E})\phi = (L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E} \cdot e\phi^*)e = (L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E} \cdot \phi e^*)e$$
$$= \mathrm{Diag}\left((L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E})e\right)\phi.$$

$\phi$ erweist sich als Eigenvektor zum Eigenwert 1 der zeilenstochastischen und unzerlegbaren Matrix

$$M := \left(\mathrm{Diag}\left((L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E})e\right)\right)^{-1}\left(L^{(-1)} \cdot A \cdot \mathfrak{E}\right),$$

nach dem Satz von PERRON - FROBENIUS (vgl. etwa WIELANDT [2]) kann also nur $\phi = \text{const.}\, e$ gelten. $\mathfrak{E}$ ist nämlich wegen des Zusammenhanges von $\Gamma$ unzerlegbar, und somit auch M.

Ist $0 \neq \lambda = \lambda_k^{(j)}$ wie unter (b), so liest man (1) aus (6.7.3) ab. Für $\lambda \neq 0$ und $\phi = 0$ zeigt (6.7), daß

$$U(1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Psi \cdot B^{(-1)} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, B) = 0$$

und daß der Fall (b) vorliegen muß, da U als Eigenlösung nicht die Nullmatrix sein kann.

Es bleibt der Fall, daß $0 \neq \lambda$ nicht zu (b) gehört:

$$(C) \quad \forall j \in \{1,..,N\} : \sin(\sqrt{\lambda}\, l_j a_j^{-1/2}) \neq 0$$

Mit (6.2) und $x = 1$ in (6.7.1) ergibt sich zunächst

$$\Phi^* = \Phi \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\, B) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Psi \cdot B^{(-1)} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, B)$$

und dann mit (C)

$$(D) \quad \Psi = \sqrt{\lambda}\, B \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\, B)\right)^{(-1)} \cdot \left(\Phi^* - \Phi \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\, B)\right).$$

Setzt man (D) in (6.4) ein und berücksichtigt (6.7.3) und, daß wegen (C) $\phi \neq 0$ sein muß, so ergibt sich (3):

$$0 = \left(A^{(1/2)} \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\, B)\right)^{(-1)} \cdot \Phi^*\right)e$$
$$- \left(A^{(1/2)} \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\, B)\right)^{(-1)} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\, B) \cdot \Phi\right)e$$

$$0 = \left(A^{(1/2)} \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\,B)\right)^{(-1)}\right)\phi$$
$$- \operatorname{Diag}\left(\left(A^{(1/2)} \cdot \left(\sin(\sqrt{\lambda}\,B)\right)^{(-1)} \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\,B)\right)e\right)\phi$$
$$= \mathcal{D}(\lambda, A, L, \mathfrak{E})\,\phi$$

Ist umgekehrt $0 \neq \phi \in \operatorname{kern} \mathcal{D}(\lambda, A, L, \mathfrak{E})$, so wird durch (D) und (6.7) gerade eine Eigenlösung $U(x)$ zu $\lambda$ mit Eckenverteilung $\phi$ bestimmt. Q.e.d.

Der Fall (a) tritt immer ein, und es liegt mindestens einmal - und damit abzählbar oft - der Fall (b) oder (c) vor. Im Falle (b) ist $\Psi$ im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt, durch Ersetzung der $\sin(\sqrt{\lambda}\,b_{ih}) = 0$ entsprechenden Elemente in (D) gemäß (6.8.1) läßt sich in Abhängigkeit dieser auch hier noch eine Bedingung an die $\psi_{ih}$ herleiten, für die $0 \neq \sin(\sqrt{\lambda}\,b_{ih})$ gilt. Nicht immer führen alle $\lambda_k^{(j)}$ zu Eigenwerten von (6.6), etwa, wenn im Falle $L^{(2)} = A$ $\Gamma$ ein Kreis ungerader Länge ist, vgl. (6.12.5.1). Außerdem können Eigenwerte $\lambda$ zu (6.6), die durch (b) erfaßt werden, auch als Lösung von (6.8.3) auftreten, vgl. (6.12.4 und 5.2).

(6.9) Bemerkung Wird im Falle $\partial G \neq \emptyset$ die Randbedingung (5.4.d, $d_\lambda$, alle $\rho_{i2} \neq 0$) vorgelegt, indem statt (6.4)

$$(1) \quad \left(L^{(-1)} \cdot A \cdot U'(0)\right)e = \operatorname{Diag}(\tilde{\rho} - \lambda\tilde{\sigma})\,\phi$$

gelten soll mit $\tilde{\rho} := (-\rho(e_i, e_i))_{n\times 1}$, $\tilde{\sigma} := (\sigma(e_i, e_i))_{n\times 1}$ und $e_i := (\delta_{ih})_{n\times 1}$, vgl. (5.9 und 10), so lösen die Eigenwerte $\lambda$ der (6.6) entsprechenden Aufgabe, die nicht unter (b) fallen, nebst $\phi$ die Gleichung

$$(2) \quad \mathcal{D}(\lambda, A, L, \mathfrak{E})\,\phi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Diag}(\tilde{\rho} - \lambda\tilde{\sigma})\,\phi.$$

Natürlich tritt hier der Fall (a) im allgemeinen nicht ein.

Die Gleichung (6.8.3) erlaubt im allgemeinen noch keine explizite Angabe der Eigenwerte in Abhängigkeit von den vorgegebenen Größen in (5.1) und (5.4). Im Falle der Differentialgleichung $l_j^2 u_{jx_jx_j} = -\lambda u_j$ zur Kante $k_j$, d.h. $L^{(2)} = A$, ist dies jedoch möglich. Gesucht werden jetzt $\lambda$ und $U = (u_{ih})_{n\times n}$ mit

(6.10) (1) $\forall i,h \in \{1,\dots,n\}: u_{ih} \in C^2([0,1])$ und $(e_{ih}=0 \Rightarrow u_{ih}=0)$

(2) $U^*(x) = U(1-x)$ in $[0,1]$ (3) $\exists \phi \in \mathbb{R}^n: U(0) = \phi e^* \cdot \mathcal{E}$

(4) $(L \cdot U'(0))e = 0$ (5) $U''(x) = -\lambda U(x)$

Für $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$ wird durch $\lambda$ und die Eckenverteilung $\phi$ die Eigenlösung $U(x) = U(x;\lambda;\phi)$ mit (D) eindeutig festgelegt:

(E) $$U'(0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}} (e\,\phi^* - \cos\sqrt{\lambda}\,\phi e^*) \cdot \mathcal{E}$$

(F) $$U(x;\lambda;\phi) := \cos(x\sqrt{\lambda})\,\mathcal{E} \cdot \phi e^* + \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sin\sqrt{\lambda}} (e\phi^* - \cos\sqrt{\lambda}\,\phi e^*) \cdot \mathcal{E}$$

(6.11) Lemma Die zeilenstochastische Matrix

$$Z := \left(\mathrm{Diag}\left((\mathcal{E} \cdot L)e\right)\right)^{-1} (\mathcal{E} \cdot L)$$

ist unzerlegbar und besitzt nur reelle Eigenwerte, die der Vielfachheit entsprechend oft gezählt mit

$$1 = \mu_1 > \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq -1$$

bezeichnet werden, und es gibt bezüglich $\mathrm{Diag}((\mathcal{E} \cdot L)e)$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus zu $\mu_1,\dots,\mu_n$ gehörenden Eigenvektoren $\zeta_1 = e, \zeta_2, \dots,$ bzw. $\zeta_n$.
Ferner gilt die Äquivalenz

(1) $-1$ ist Eigenwert von $Z \iff \Gamma$ ist paar,

und $\mu_n = -1$ ist dann einfacher Eigenwert zum Eigenvektor $\zeta_n$ aus $n_o$ Komponenten $\zeta_{nh} = 1$ und $n - n_o$ Komponenten $\zeta_{nh} = -1$, wobei $1 \leq n_o \leq n-1$ nur von $\Gamma$ abhängt.

Beweis Die Unzerlegbarkeit von $\mathcal{E}$ zieht die von $Z$ nach sich, $1 = \mu_1$ ist Eigenwert zum Eigenvektor $\zeta_1 = e$, und alle Eigenwerte vom Betrage 1 sind einfach nach dem Satz von PERRON - FROBENIUS. Zu $\phi \in \mathbb{C}^n$ und $\mu \in \mathbb{C}$ gelten mit

(G) $$\Delta := \mathrm{Diag}\left((\mathcal{E} \cdot L)e\right)$$
$$W := \Delta^{-1/2} (\mathcal{E} \cdot L) \Delta^{-1/2}$$
$$\tilde{\phi} := \Delta^{1/2} \phi$$

die Äquivalenzen:

$$Z\phi = \mu\phi \iff (\mathfrak{E} \cdot L)\phi = \mu\Delta\phi \iff W\tilde{\phi} = \mu\tilde{\phi}$$

Da $\Delta$ positiv-definit und $\mathfrak{E}$ symmetrisch ist, ist das Spektrum von Z gleich dem Spektrum der symmetrischen Matrix W, zu der eine Orthogonalbasis aus zu $\mu_1,\ldots,\mu_n$ gehörenden Eigenvektoren $\tilde{\zeta}_1 = \Delta^{1/2}e, \tilde{\zeta}_2, \ldots,$ bzw. $\tilde{\zeta}_n$ existiert. Mit $\zeta_i = \Delta^{-1/2}\tilde{\zeta}_i \in \mathbb{R}^n$ sind dann alle Behauptungen bis zur Äquivalenz (1) gezeigt.

In paarem $\Gamma$ lassen sich die Ecken so numerieren, daß mit einer geeigneten Zahl $n_o$ mit $1 \leq n_o \leq n-1$ (etwa $n_o$ auf S.38)

$$e_{ih} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i,h \leq n_o$$

$$e_{ih} = 0 \quad \text{für } n_o+1 \leq i,h \leq n$$

gilt. Erklärt durch $\zeta_{nh} := 1$ für $1 \leq h \leq n_o$ und $\zeta_{nh} := -1$ für $n_o+1 \leq h \leq n$, erfüllt $\zeta_n := (\zeta_{nh})_{n\times 1}$ dann $Z\zeta_n = -\zeta_n$.

Zum Nachweis der Implikation "$\Longrightarrow$" in (1) werde zunächst $\phi = (\phi_i) \in \mathbb{R}^n$ mit $Z\phi = -\phi$ so gewählt, daß $\tilde{\phi}$ aus (G), als Eigenvektor von W zu $-1$, $\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} = 1$ erfüllt. Aus den entsprechenden Rayleighquotienten der nichtnegativen Matrix W liest man ab:

$$-1 = \sum_{i,h=1}^{n} w_{ih}\tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_h \quad \text{und} \quad 1 \leq \sum_{i,h=1}^{n} w_{ih}|\tilde{\phi}_i||\tilde{\phi}_h| \leq 1.$$

Da 1 einfacher Eigenwert von Z und W ist, gibt es $c>0$, so daß

$$(|\tilde{\phi}_i|)_{n\times 1} = c\,\tilde{\zeta}_1 \quad \text{und} \quad (|\phi_i|)_{n\times 1} = c\,e.$$

Nun kann man $\phi$ als Eigenvektor von Z zum Eigenwert $-1$ so wählen, daß $(|\phi_i|)_{n\times 1} = e$ ist. Dann sind

$$\mathcal{N}^- := \{i : 1 \leq i \leq n,\ \phi_i = -1\} \neq \emptyset$$

$$\mathcal{N}^+ := \{i : 1 \leq i \leq n,\ \phi_i = +1\} \neq \emptyset,$$

und für die zeilenstochastische Matrix $Z = (z_{ih})$ und für die positive Matrix L gilt wegen $Z\phi = -\phi$:

$$i \in \mathcal{N}^- \Longrightarrow 1 = \sum_{h\in\mathcal{N}^+} z_{ih} - \sum_{h\in\mathcal{N}^-} z_{ih} \Longrightarrow \forall h \in \mathcal{N}^- : z_{ih} = e_{ih} = 0$$

$$i \in \mathcal{N}^+ \Longrightarrow -1 = \sum_{h\in\mathcal{N}^+} z_{ih} - \sum_{h\in\mathcal{N}^-} z_{ih} \Longrightarrow \forall h \in \mathcal{N}^+ : z_{ih} = e_{ih} = 0$$

Somit liefern $\mathcal{N}^-$ und $\mathcal{N}^+$ eine Zweiteilung von $\Gamma$ zu einem paaren Graphen. Q.e.d.

Alle Eigenwerte und Eckenverteilungen zu (6.10) lassen sich mit Hilfe der Matrix Z bestimmen.

(6.12) Satz Genau dann ist $\lambda$ Eigenwert der Aufgabe (6.10) und $\phi \neq 0$ Eckenverteilung einer zu $\lambda$ gehörenden Eigenlösung, wenn $\cos\sqrt{\lambda}$ und $\phi \neq 0$ der Gleichung

(1) $$(\mathfrak{E} \cdot L)\phi = \cos\sqrt{\lambda}\, \mathrm{Diag}\big((\mathfrak{E} \cdot L)e\big)\phi$$

genügen. Alle Lösungen $\lambda, \phi, U$ von (6.10) sind mit (6.11) wie folgt gegeben:

(2) $\lambda_{10} = 0$, $\phi_{10} = c\,e$, $U = c\,\mathfrak{E}$, $c \in \mathbb{R}$.

(3) Für $2 \leq s \leq n$ und $-1 < \mu_s$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_{sk} = \begin{cases} (-\arccos \mu_s + (k+1)\pi)^2, & \text{falls } k \equiv 1 \bmod 2, \\ (\arccos \mu_s + k\pi)^2, & \text{falls } k \equiv 0 \bmod 2, \end{cases}$$

$\phi_{sk} = c\,\zeta_s$, $U_{sk} = U(\,;\lambda_{sk};\phi_{sk})$ wie unter (F), $c \in \mathbb{R}$.

(4) Für $0 \neq k \in \mathbb{N}$:

$\lambda_{1k} = 4\pi^2 k^2$, $\phi_{1k} = c\,e$, $c \in \mathbb{R}$, also $\phi_{1k} e^* = e\phi_{1k}^*$,

$U_{1k}(x) = c\cos(x2\pi k)\mathfrak{E} + (2\pi k)^{-1}\sin(x2\pi k)\,\Psi \cdot \mathfrak{E}$

mit reeller $n \times n$ - Matrix $\Psi$, $\Psi^* = -\Psi$, $(L \cdot \Psi \cdot \mathfrak{E})e = 0$.

(5.1) Falls $\Gamma$ nicht paar ist, für $k \in \mathbb{N}$:

$\lambda_{n+1,k} = (2k+1)^2\pi^2$, $\phi_{n+1,k} = 0$

$U_{n+1,k}(x) = (2k+1)^{-1}\pi^{-1}\sin(x(2k+1)\pi)\,\Psi \cdot \mathfrak{E}$

mit reeller $n \times n$ - Matrix $\Psi$, $\Psi^* = \Psi$, $(L \cdot \Psi \cdot \mathfrak{E})e = 0$.

(5.2) Falls $\Gamma$ paar ist, für $k \in \mathbb{N}$:

$\lambda_{nk} = (2k+1)^2\pi^2$, $\phi_{nk} = c\,\zeta_n$, $c \in \mathbb{R}$, also $\phi_{nk} e^* = -e\phi_{nk}^*$,

$U_{nk}(x) = c\cos(x(2k+1)\pi)\,\zeta_n e^* \cdot \mathfrak{E}$

$\quad + (2k+1)^{-1}\pi^{-1}\sin(x(2k+1)\pi)\,\Psi \cdot \mathfrak{E}$

mit $\Psi$ wie in (5.1).

(6) Zu Eigenlösungen können Eckenverteilungen $0 \neq \phi \geq 0$ oder $0 \neq \phi \leq 0$ nur als Gleichverteilung im Falle (4) auftreten.

Für die Vielfachheiten $m(\lambda) := \dim \operatorname{kern}(\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G})$, vgl. (5.11.(O)), gilt

(7) $m(0) = 1$,

$m(\lambda) = \dim \operatorname{kern}(Z - \cos\sqrt{\lambda}\, I_{n\times n})$, falls $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$,

$m(\lambda) = N - n + 2 = \text{Korang}(\Gamma) + 1$ im Falle (4) und (5.2),

$m(\lambda) = N - n = \text{Korang}(\Gamma) - 1$ im Falle (5.1).

Der Fall (5.1) tritt daher genau dann nicht ein, wenn $\Gamma$ genau einen Kreis enthält, und dieser von ungerader Länge ist.

Beweis Im Falle $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$ oder $-1 < \mu_s < 1$ ergeben sich (1) und (3) mit (6.8.c),(6.11),(E) und (F). Alle $\lambda_{sk}$, $U_{sk}$ und $\phi_{sk}$ aus (4) und (5) lösen (1) und (6.10).
Bilden umgekehrt $\lambda$,U und $\phi$ eine Lösung von (6.10) mit $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, so gilt mit (6.7) und (6.8.1)

$$\Phi^* = \cos\sqrt{\lambda}\,\Phi, \quad \Psi^* = -\cos\sqrt{\lambda}\,\Psi.$$

$\cos\sqrt{\lambda} = 1$ führt auf (4), $\cos\sqrt{\lambda} = -1$ auf (5), und in diesem Falle ist $0 \neq \Phi^* = -\Phi$ nur möglich, wenn $\Gamma$ keine Kreise ungerader Länge enthält, was gleichwertig zur Zweiteilbarkeit von $\Gamma$ ist. (6.11.1) gemäß ist daher die Unterscheidung in die Fälle (5.1) und (5.2) zu treffen. (6.11) zeigt auch die Gültigkeit von (1) für $\sin\sqrt{\lambda} = 0$.
Nach dem Satz von PERRON - FROBENIUS folgt (6), da von 0 verschiedene Eckenverteilungen zu Eigenlösungen von (6.10) Eigenvektoren der Matrix Z sind.
Die beiden ersten Behauptungen in (7) ergeben sich sofort mit (6.8.a),(1) und (3), zu bestimmen bleiben noch die Vielfachheiten in den Fällen (4),(5.1) und (5.2). Dazu sei $\mathcal{M}(\Gamma)$ der Vektorraum der zu $\mathfrak{E}$ passenden reellen n×n - Matrizen:

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{\Psi : \Psi = (\psi_{ih})_{n\times n},\ \forall\, i,h \in \{1,..,n\}: (e_{ih} = 0 \Rightarrow \psi_{ih} = 0)\}.$$

Die Hadamardmultiplikation mit L ist ein Automorphismus von $\mathcal{M}(\Gamma)$, weshalb es genügt, die Vielfachheiten im Falle $L = e\, e^*$

zu berechnen. Der Rang der Inzidenzmatrix D ist n - 1, vgl. BIGGS [1] Prop.(4.3), und

$$(G) \quad \text{Korang}(\Gamma) := \dim \operatorname{kern} D = N - n + 1.$$

Wegen $e_{ih} d_{is(i,h)} = -e_{ih} d_{hs(i,h)}$ vermittelt die Abbildung

$$(x_j)_{N\times 1} \longmapsto (e_{ih} d_{is(i,h)}\ x_{s(i,h)})_{n\times n} =: \tilde{X}$$

eine Isomorphie $\mathbb{R}^N \cong \{\Psi \in \mathcal{M}(\Gamma) : \Psi^* = -\Psi\}$ mit

$$(x_j)_{N\times 1} \quad \operatorname{kern} D \iff \tilde{X}\, e = 0,$$

was $m(\lambda) = 1 + \text{Korang}(\Gamma)$ im Falle (4) nach sich zieht.
In einem paaren Graphen $\Gamma$ läßt sich die Eckenmenge gerade durch passende Orientierung in 0 - und 1 - Punkte zerlegen, vgl. S.38, wodurch die Faktoren $d_{ij}$ in der KIRCHHOFFbedingung (5.2) gestrichen werden können. Vermöge

$$(x_j)_{N\times 1} \longmapsto (e_{ih} x_{s(i,h)})_{n\times n}$$

ist dann $\operatorname{kern} D \cong \{\Psi \in \mathcal{M}(\Gamma) : \Psi = \Psi^*, \Psi e = 0\}$ und mit (G) im Falle (5.2) $m(\lambda) = 1 + \text{Korang}(\Gamma)$.
Die Gleichung $m(\lambda) = N - n$ im Falle (5.1) wird durch (H) gezeigt, was durch vollständige Induktion nach der Kantenzahl N bewiesen wird:

$$(H) \quad \Gamma \text{ nicht paar} \implies \delta(\Gamma) := \dim \mathcal{M}^\circ(\Gamma) = N - n,$$

worin $\mathcal{M}^\circ(\Gamma) = \{\Psi \in \mathcal{M}(\Gamma) : \Psi^* = \Psi, \Psi e = 0\}$ gesetzt wurde.
Offenbar gilt die Behauptung (H) für $N \leq 4$. Unter den zusammenhängenden Graphen $\Gamma$ erfüllen gerade diejenigen $N = n$, die genau einen Kreis enthalten, und ist dieser von ungerader Länge, so gilt $\delta(\Gamma) = 0$. (Kreise sind zusammenhängende, reguläre Graphen vom Grade 2.)
$\Gamma$ kann daher als nicht paarer Graph mit $N \geq 5$ angenommen werden, der mindestens zwei Kreise enthält. Dann findet man eine Kante $k \in K(\Gamma)$ und $\Psi_o \in \mathcal{M}^\circ(\Gamma)$, so daß der Teilgraph

$$(\dagger) \quad \Delta := (E(\Gamma), K(\Gamma) \setminus \{k\}) \text{ zusammenhängend und nicht paar}$$

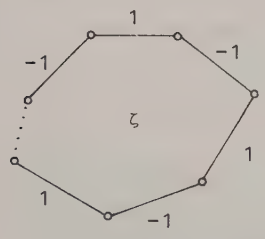
ist, und $\mathcal{M}^\circ(\Delta)$ direkter Summand von $\mathcal{M}^\circ(\Gamma)$ ist mit

$$(\dagger\dagger) \qquad \mathcal{M}^\circ(\Gamma) = \mathbb{R}\Psi_o \oplus \mathcal{M}^\circ(\Delta).$$

Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

(H1) Es gibt Kreise gerader Länge in $\Gamma$.

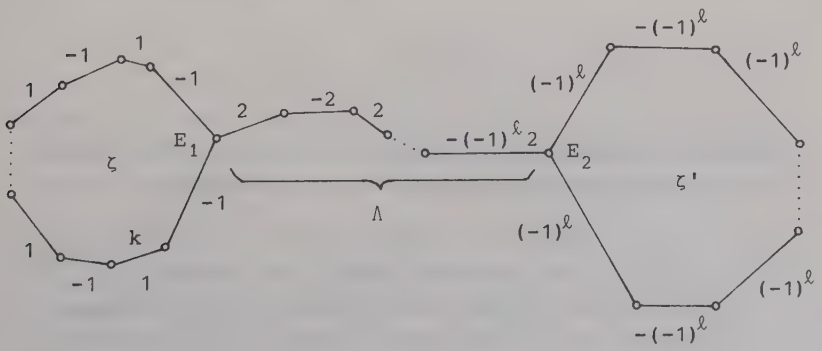
Dann existiert eine Kante $k \in K(\Gamma)$, die auf einem Kreis $\zeta$ gerader Länge in $\Gamma$ liegt, die aber nicht zugleich auf allen Kreisen ungerader Länge in $\Gamma$ liegt. Indem man auf den Kanten von $\zeta$ abwechselnd +1 und -1 und auf den übrigen Kanten von $\Gamma$ den Wert 0 vorschreibt, erklärt man eine Matrix $\Psi_o \in \mathbb{M}^o(\Gamma)$, mit der zusammen $\Delta$ den Forderungen (†) und (††) genügt, weil in allen Matrizen aus $\mathbb{M}(\Gamma)$ an den k entsprechenden Stellen eine 0 steht.




(H2) Es gibt keine Kreise gerader Länge in $\Gamma$.

Man wähle dann zwei beliebige Kreise $\zeta$ und $\zeta'$ in $\Gamma$, die wegen (H2) keine Sehnen enthalten können. $\zeta$ und $\zeta'$ können aber auch keine gemeinsamen Kanten besitzen, da $\Gamma$ sonst einen Kreis gerader Länge enthielte, nämlich den, der aus allen den Kanten von $\zeta$ oder $\zeta'$ gebildet wird, die nicht in beiden Kreisen zugleich liegen.

Als k wird eine beliebige Kante von $\zeta$ gewählt. Mit Hilfe eines doppelpunktfreien Weges $\Lambda$ der Länge $\ell$, der zwei Ecken $E_1 \in E(\zeta)$ und $E_2 \in E(\zeta')$ verbindet und o.B.d.A. keine Kanten mit $\zeta$ und $\zeta'$ gemeinsam hat, wird $\Psi_o$ wie folgt erkärt. ($\ell = 0$, d.h. $E_1 = E_2$ ist möglich.)



Auf den beiden mit $E_1$ $(E_2)$ inzidenten Kanten von $\zeta$ $(\zeta')$ schreibe man $-1$ $((-1)^\ell)$ vor, auf der mit $E_1$ $(E_2)$ inzidenten Kante von $\Lambda$, $2$ $(-(-1)^\ell\, 2)$, auf den anderen Kanten von $\zeta$, $\zeta'$ und $\Lambda$ abwechselnd $1$ und $-1$ bzw. $(-1)^\ell$ und $-(-1)^\ell$ bzw. $2$ und $-2$, und auf den übrigen Kanten von $\Gamma$ den Wert $0$, so daß die entsprechend gebildete Matrix $\Psi_o$ in $\mathcal{M}^\circ(\Gamma)$ liegt. Wie oben erfüllen $\Delta$ und $\Psi_o$ die Forderungen (†) und (††).
In beiden Fällen gilt nach Induktionsannahme mit (†)

$$\delta(\Delta) = N - 1 - n,$$

woraus mit (††) schließlich $\delta(\Gamma) = \delta(\Delta)+1 = N - n$ folgt. Q.e.d.

Die im Beweis verwandten Abbildungen und Konstruktionen von $\Psi_o$ zeigen auch, wie in den Fällen (4), (5.2) und (5.1) jeweils eine Basis des Eigenraumes gefunden werden kann. Dazu wählt man ein Gerüst in $\Gamma$ und zu diesem die $N - n + 1$ eindeutig bestimmten Kreise in $\Gamma$, die einer Basis des Kernes von D entsprechen, vgl. BIGGS [1] §§4-5. Im Falle (5.1) treten gemäß (H2) Kreise ungerader Länge dabei nur paarweise auf, da hier die Werte von $\Psi \in \mathcal{M}^\circ(\Gamma)$ auf einem Kreis ungerader Länge durch die übrigen Werte festgelegt sind.

Im Falle $A=L^{(2)}=\text{const.}\, e\, e^*$ - man beachte, daß sich jeder endliche Graph krummlinig mit Kantenbögen gleicher Länge im $\mathbb{R}^3$ darstellen läßt - sind $\lambda_{sk}$, $\phi_{sk}$ und $U_{sk}$ allein von Größen abhängig, die dem abstrakten Graphen $\Gamma$ eigen sind, und die charakteristische Gleichung (6.12.1) reduziert sich auf

$$(6.13)\quad \forall i \in \{1,\dots,n\}: \sum_{h=1}^{n} e_{ih}\,\phi_h = \gamma_i \cos\sqrt{\lambda}\ \phi_i.$$

Stimmen die Grade aller Ecken überein, so erkennt man in (6.13) die Eigenwerte des Graphen $\Gamma$ (Eigenwerte von $\mathfrak{E}$):

(6.14) Sei $\Gamma$ regulär vom Grade $\gamma$, $A = L^{(2)}$, und seien alle Kanten in G von gleicher Länge. Dann werden alle von 0 verschiedenen Eckenverteilungen $\phi$ zu Eigenlösungen von (6.10) gerade durch alle Werteverteilungen von $\Gamma$

(Eigenvektoren von $\mathfrak{E}$) gegeben, und mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda$ durchläuft $\gamma \cos\sqrt{\lambda}$ gerade das Spektrum von $\Gamma$:

$$\mathfrak{E}\phi = \gamma \cos\sqrt{\lambda}\ \phi.$$

Das Spektrum von $\Gamma$ bestimmt hier die Eigenwerte unter (6.12. 3 und 5.2), und zur weiteren Behandlung können nun die Ergebnisse der algebraischen Graphentheorie angewandt werden. Bezeichnet d den Durchmesser von $\Gamma$, so sind unter $\mu_2,\ldots,\mu_n$ mindestens d verschiedene Werte, vgl. BIGGS [1](2.7), welche untere Schranke für die Klasse der distanz-regulären, insbesondere also für die vollständigen Graphen (s.u.), nach einem Resultat von R. M. DAMERELL (1973) angenommen wird, vgl. BIGGS [1](20.7). Allgemeiner erhält man eine erste Information über die Existenz mehrfacher Eigenwerte $\mu_i$ mit Hilfe der Automorphismengruppe Aut($\Gamma$) von $\Gamma$, die isomorph zur Gruppe der Permutationsmatrizen ist, welche mit der Adjazenzmatrix $\mathfrak{E}$ vertauschbar sind. Enthält Aut($\Gamma$) nämlich Elemente der Ordnung größer als 2, so besitzt $\Gamma$ mehrfache Eigenwerte, vgl. BIGGS [1](15.4). Genauer scheinen sich jedoch die Vielfachheiten auf diesem Wege nicht bestimmen zu lassen, wie auch das abschließende Beispiel des vollständigen Graphen mit n Ecken verdeutlicht, dessen Automorphismengruppe gerade die symmetrische Gruppe auf n Elementen ist.

Für den vollständigen Graph $K_n$ mit n Ecken ist $N = \binom{n}{2}$ und

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(K_n) = e\,e^* - I_{n\times n}.$$

$\mathfrak{E}$ besitzt den einfachen Eigenwert $\gamma = n-1$ und den $(n-1)$-fachen Eigenwert $-1$. Zur Aufgabe (6.10) im Falle $A = L^{(2)} = \text{const.}\ e\,e^*$ werden $\lambda$ und $\phi$ gemäß (6.12) gebildet, und die folgende Tabelle zeigt die Verbindung zu den Eigenwerten $\varepsilon = \gamma \cos\sqrt{\lambda}$ von $K_n$.

| $\lambda$ | 0 | $(2\pi k)^2$ $k \neq 0$ | $(2k+1)^2\pi^2$ | $\left((-1)^k \arccos\left(\frac{-1}{n-1}\right) + \frac{2k+1-(-1)^k}{2}\pi\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $m(\lambda)$ | 1 | $2+\frac{n(n-3)}{2}$ | $\frac{n(n-3)}{2}$ | $n-1$ |
| $\phi$ | e | e | 0 | $\phi \in \operatorname{kern} e e^*$ |
| $\varepsilon$ | n-1 | n-1 | - | -1 |
| $m(\varepsilon;\mathcal{E})$ | 1 | 1 | 0 | n-1 |

(6.15) Anmerkung Zur Illustration der gewichteten KIRCHHOFFbedingung und von (5.22) werde noch eine charakteristische Gleichung im Falle $L = e\,e^*$ und $\partial G = \emptyset$ für die Aufgabe

(1) $u_{jx_jx_j} = -\lambda u_j$ für $1 \leq j \leq N$, $u \in C^2(G,\mathbb{C})$, u erfüllt (5.3)

angegeben. Zur Ventilmatrix $(c_{ij})_{N\times n}$ aus (5.3 und 22) sei

$$\mathcal{C} = (e_{ih}\, c_{i\,s(i,h)})_{n\times n} \quad \text{und o.B.d.A. } \operatorname{Diag}(\mathcal{C}e) = I_{n\times n},$$

$\mathcal{C}$ sei also zeilenstochastisch. (1) ist gleichwertig zur Aufgabe (2) mit $U = (u_{ih})_{n\times n}$

$$(2)\quad \begin{cases} \forall i,h \in \{1,..,n\}: u_{ih} \in C^2([0,1],\mathbb{C}) \text{ und } \left(e_{ih}=0 \Longrightarrow u_{ih}=0\right), \\ U'' = -\lambda U,\ U^t(x) = U(1-x) \text{ in } [0,1], \exists\, \phi \in \mathbb{C}^n: U(0) = \phi e^* \cdot \mathcal{E} \\ \text{und } \left(\mathcal{C}\cdot U'(0)\right)e = 0. \end{cases}$$

In Analogie zum obigen Vorgehen - statt * schreibt man nur besser $^t$ für die Transponierung - zeigt man: Gehören $\lambda$ und $\phi$ zu einer Lösung U von (2) mit $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$, so gilt

$$(3) \qquad \mathcal{C}\phi = \cos\sqrt{\lambda}\ \phi.$$

Umgekehrt führt jeder Eigenvektor $\phi$ von $\mathcal{C}$ zum Eigenwert $\cos\sqrt{\lambda}$ auf eine Lösung U von (2). Im allgemeinen besitzt $\mathcal{C}$ nichtreelle Eigenwerte, die auf ebensolche von (1) führen. Schon im einfachsten Falle n=N=3 zeigt sich dies für $\det\mathcal{C} > \frac{1}{4}$.

## Literatur

AMANN, Herbert
Invariant Sets and Existence Theorems for Semilinear Parabolic and Elliptic Systems. J. Math. Analysis and Applications 65 (1978) 432 - 467.

BIGGS, Norman L.
[1] Algebraic Graph Theory. Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 67, Cambridge 1974.

[2] Interaction Models. London Math. Soc. Lect. Notes Vol. 30, Cambridge 1977.

CAMERER, Hartwig
Die elektrotonische Spannungsausbreitung im Soma, Dendritenbaum und Axon von Nervenzellen. Dissertation Tübingen 1980.

CHEN, Wai - Kai
Applied Graph Theory. Amsterdam 1971.

CODDINGTON, Earl A., und Hendrik S. V. de SNOO
Regular Boundary Value Problems Associated with Pairs of Ordinary Differential Expressions. Lect. Notes in Mathematics Vol. 858, Berlin 1981.

COLLATZ, Lothar, und Ulrich SINOGOWITZ
Spektren endlicher Grafen (sic!). Abhandlungen a.d. Math. Sem. Hamburg 21 (1957) 63 - 77.

COURANT, Richard, und David HILBERT
Methoden der mathematischen Physik I. 3. Auflage, Berlin 1968.

FORD, L. R., und D. R. FULKERSON
Flows in Networks. Princeton, New Jersey 1962.

FRIEDMAN, Avner
Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs , New Jersey 1964.

GILBARG, David, und Neil S. TRUDINGER
Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundl. d. math. Wissenschaften Bd. 224, Berlin 1977.

HALIN, Rudolph
[1] Graphentheorie I. Darmstadt 1980.

[2] Graphentheorie II. Darmstadt 1981.

HÖLDER, Ernst
Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Varia-

tion (allgemeine Randbedingungen). Acta mathematica 70 (1939) 193 - 242.

HOFFMAN, Alan J.
Eigenvalues of graphs. In: Studies in graph theory, ed. by D. R. FULKERSON, Washington D.C. 1975, pp.225-245.

INCE, Edward Lindsay
Ordinary Differential Equations. London 1927.

KAMKE, Erich
Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösunden, I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mathematik u. Anwdgn. i. Physik u. Technik Reihe A Bd. 18, 8. Auflage, Leipzig 1967.

KIRCHHOFF, Gustav Robert
Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Ann. d. Physik u. Chemie 72 (1847) 497 - 508.

LSU =

LADYŽENSKAJA, Olga A., V. A. SOLONNIKOV und Nina N. URAL'CEVA
Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Math. Monographs Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1968.

LADYŽENSKAJA, Olga A., und Nina N. URAL'CEVA
Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Mathemat. in Science a. Engineering Vol.46, New York 1968.

LERAY, Jean und Jules [Pawel Juliusz] SCHAUDER
Topologie et équations fonctionelles. Ann. Scientifiques de l'École Norm. Sup. 3e Série, 51 (1934) 45 - 78.

LLOYD, Noel Glynne
Degree theory. Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 73, Cambridge 1978.

LUMER, Gunter
[1] Connecting of local operators and evolution equations on networks. In: Potential Theory Copenhagen 1979 (Proceedings) = Lect. Notes in Mathematics Vol. 787, Berlin 1980, pp.219 - 234.

[2] Équations de diffusion sur des réseaux infinis. Séminaire GOULAOUIC - SCHWARTZ 1979 - 1980, Exposé No. XVIII, Paris 1980, pp. 1 - 9.

[3] Problème de Cauchy et fonctions surharmoniques. Séminaire de Théorie de Potentiel, Paris No.2 = Lect. Notes in Mathematics Vol. 563, Berlin 1976, pp.202 - 218.

MAYEDA, Waturn
Graph Theory. New York 1972

PROTTER, M. H., und Hans F. WEINBERGER
Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs, New Jersey 1967.

REID, William T.
Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations. Appl. Math. Sciences Vol. 31, New York 1980.

SCHAEFER, Helmut H.
[1] Topological Vector Spaces. 3rd ed., New York 1971.
[2] Über die Methode der a priori - Schranken. Math. Ann. 129 (1955) 415 - 416.

SCH =

SCHÄFKE, Friedrich Wilhelm und Albert SCHNEIDER
[1] S - hermitesche Rand - Eigenwertprobleme I. Math. Ann. 162 (1965) 9 - 26.
[2] S - hermitesche Rand - Eigenwertprobleme II. Math. Ann. 165 (1966) 236 - 260.
[3] S - hermitesche Rand - Eigenwertprobleme III. Math. Ann. 177 (1968) 67 - 94.

SCHNEIDER, Albert
Die Greensche Matrix S - hermitescher Rand - Eigenwertprobleme im Normalfall. Math. Ann. 180 (1969) 307-312.

SOLONNIKOV, V. A.
On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form. Proc. STEKLOV Institute of Math. Vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1965.

SULANKE, R., und P. WINTGEN
Differentialgeometrie und Faserbündel. Basel 1972.

v. WAHL, Wolf
Klassische Lösbarkeit im Großen für nichtlineare parabolische Systeme und das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$. Nachr. Akad. d. Wissenschaften Göttingen, II. Math. - Phys. Klasse, 1981 Nr. 5.

WALTER, Wolfgang
Differential- und Integralungleichungen. Springer Tracts in Nat. Philosophy Vol. 2, Berlin 1964.

WIELANDT, Helmut
[1] Über die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten. Math. Nachr. 4 (1950/51) 308 - 314.
[2] Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z. 52 (1950) 642 - 648.

WLOKA, Joseph
Funktionalanalysis und Anwendungen. Berlin 1971.

# Lebenslauf

Am 6. August 1952 wurde ich geboren in Gütersloh, weiland Kreis Wiedenbrück; meine Eltern sind der Jurist und Kaufmann Werner v. Below und die Malerin Helga v. Below, geb. Kreisel. Nach der evangelischen Volksschule in Wiedenbrück von 1959 bis 1963, besuchte ich von Ostern 1963 bis Juni 1971 das Städtische Gymnasium zu Wiedenbrück, an dem ich im Mai 1971 das Abitur ablegte.

Vom Wintersemester 1971/72 bis zum Wintersemester 1976/77 studierte ich Mathematik, Physik und Geschichte der Naturwissenschaften an der Eberhard - Karls - Universität Tübingen, wo ich im November 1976 das Diplom in Mathematik erhielt. Dazu verfaßte ich unter der Anleitung von Prof. Dr. H. Wielandt eine Diplomarbeit mit dem Titel "Zur Berechnung der $\pi$ - Klassenzahl einer endlichen Gruppe aus nichtauflösbaren normalen Faktoren". Während des Studiums erhielt ich ein Stipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes. Im Studienjahr 1971/72 besuchte ich außerdem das Leibniz - Kolleg der Universität Tübingen.

Vom Sommersemester 1974 bis zum Wintersemester 1976/77 war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen und von Januar 1977 bis März 1977 Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Biomathematik in Tübingen. Von April 1977 bis März 1982 war ich Wissenschaftlicher Angestellter in Vertretung einer Assistentenstelle in der Fakultät für Physik am Lehrstuhl für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität Tübingen bei Prof. Dr. M. Schramm. Seit April 1982 bin ich wiederum Mitarbeiter von Prof. Dr. K. - P. Hadeler am Lehrstuhl für Biomathematik der Universität Tübingen. Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von Juli 1980 bis April 1984 unter der Anleitung von Prof. Dr. K. - P. Hadeler.

Meine akademischen Lehrer in der Mathematik und in der Physik, denen ich meine Ausbildung verdanke, waren die Herren Professoren, Dozenten und Akademischen Räte

W. Felscher, H. Fischer, W. Grölz, K. - P. Hadeler, H. Hähl, H. Kaul, W. Kaup, R. Nagel, H. H. Schaefer, P. Schmid, R. - H. Schulz, H. Wielandt

und

M. Baumann, V. v. Braitenberg, M. Dal Cin, G. Elwert, F. Gönnenwein, W. Güttinger, G. Mertens, E. Pfaffelhuber, R. Schief, M. Schramm, H. Wittern.

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69